Zbiór zadań z matematyki jakie przerabiałem z moimi Bambikami.

Zbiór ten zawiera zadania ułożone przeze mnie oraz rozwiązania zadań zaczerpniętych z różnych źródeł. Między innymi są tu zadania z podręczników szkolnych lub zbiorów zadań wykorzystywanych w szkołach. Jest naturalne, że treść moich zadań jest też często w jakieś części inspirowana zadaniami z jakimi się spotkałem przeglądając różne źródła.

Ogólnie, jeśli zamieszczam tu rozwiązanie zadania z jakiegoś źródła staram się wskazać autorów tego zadania lub podać inną wskazówkę do oryginalnej treści zadania.

- Polecam dla dogłębniejszego poćwiczenia rozwiązywania tego typu zagadnień „Podręcznik do liceów i techników - MATEMATYKA” oraz „Zbiór zadań do liceów i techników - MATEMATYKA” autorstwa M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda.

  Jeśli zdecydujesz się na przerobienie tego bardzo ambitnego kursu, to z pewnością przydadzą Ci się te strony:

https://skul.pl/matematyka/matematyka-klasa-2-podrecznik-zakres-rozszerzony-rozwiazania-i-odpowiedzi,kid,721

https://skul.pl/matematyka/matematyka-klasa-2-zbior-zadan-zakres-rozszerzony-rozwiazania-i-odpowiedzi,kid,1287

- *W przypadku zadań dotyczących funkcji matematycznych szczególnie polecam korzystanie ze strony internetowej:* ***https://www.geogebra.org/graphing?lang=pl.***

  www.geogebra.org/graphing?lang=pl

  Większość zamieszczonych tu wykresów sporządziłem korzystając z tego narzędzia.

Równania wzory Viete'a

Leksykon

Funkcja kwadratowa w postaci ogólnej: **y = f(x) = ax² + bx + c**

Wartości x dla których **y(x) = 0** nazywamy miejscami zerowymi → $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

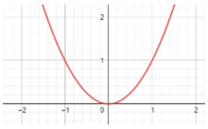
Miejsca zerowe funkcji kwadratowej:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4\,ac$$

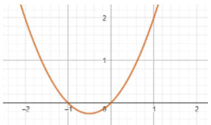
Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Jej wierzchołek ma współrzędne (**p**,**q**), gdzie:

$$p = \frac{-b}{2a} \qquad q = \frac{-\Delta}{4a}$$

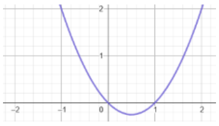
a > 0



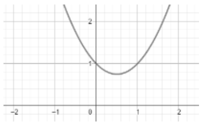
x^2



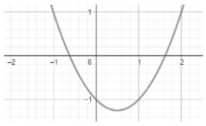
$x^2 + x$



$x^2 - x$



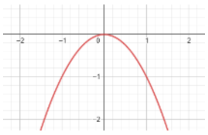
$x^2 - x + 1$



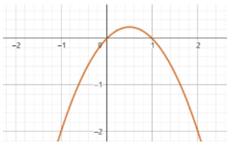
$x^2 - x - 1$

Gdy c = 0, to jedno miejsce zerowe funkcji [y(x) = 0] jest dla x = 0.

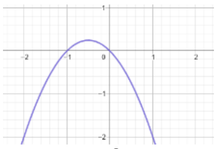
a < 0



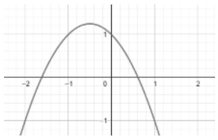
$-x^2$



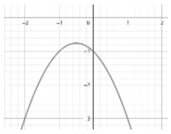
$-x^2 + x$



$-x^2 - x$



$-x^2 - x + 1$



$-x^2 - x - 1$

Gdy c = 0, to jedno miejsce zerowe funkcji

- Gdy **b = 0**, to współrzędna x wierzchołka paraboli jest równa x = 0. b ≠ 0 przesuwa wykres w poziomie. Gdy b = 0, to parabola jest symetryczna względem osi Y. Dla a>0. b > 0 wykres przesuwa się w lewo, b < 0 wykres przesuwa się w prawo. Dla a<0. b > 0 wykres przesuwa się w prawo, b < 0 wykres przesuwa się w lewo.
- Z postaci ogólnej funkcji kwadratowej mamy, że **f(0) = c**, wykres przecina oś Y w c.

  Gdy **c = 0**, to jedno miejsce zerowe jest w x = 0. c ≠ 0 przesuwa wykres w pionie.
- Współrzędna x_w = p wierzchołka paraboli leży pośrodku między wartościami x określającymi miejsca zerowe funkcji. Mamy więc x_1, x_w , x_2 . Odległość $|x_1 - x_w|$ jest równa $|x_2 - x_w|$. $x_w = p = (x_1 + x_2)/2$.

Gdy mamy funkcję $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$ i znamy miejsca zerowe tej funkcji $\mathbf{x_1}$ oraz $\mathbf{x_2}$, to możemy zapisać tę funkcję w postaci iloczynowej:

$$\mathbf{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)} \quad \rightarrow \quad b = a(x_1 + x_2) \qquad c = ax_1x_2$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$\mathbf{f(x) = a(x - p)^2 + q} \quad \rightarrow \quad b = -2ap \qquad c = ap^2 + q$$

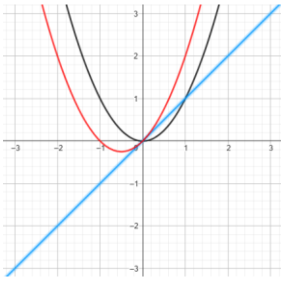
Wzory Viete'a: Jeżeli równanie ma dwa pierwiastki, to: $\mathbf{x_1 + x_2 = -b/a}$ $\quad \mathbf{x_1 \cdot x_2 = c/a}$

W wielu zadaniach wyznacza się wartość wyrażenia: $x_1^2+x_2^2$. Warto więc ją wyliczyć ogólnie.

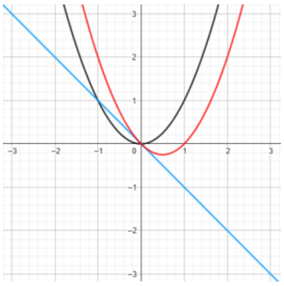
$(x_1+x_2)^2 = x_1^2+x_2^2+2x_1x_2 \quad \rightarrow \quad x_1^2+x_2^2 \ = \ (x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

Z wzoru Viete'a mamy, że: $x_1 + x_2 = -b/a$ $\quad x_1 \cdot x_2 = c/a$

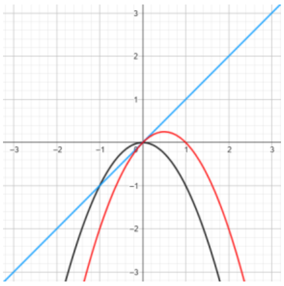
Zatem: $x_1^2+x_2^2 \ = (\frac{-b}{a})^2 - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2-2ac}{a^2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1^2+x_2^2 = \frac{b^2-2ac}{a^2}}$



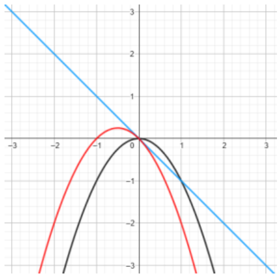
a > 0, b > 0, c = 0
y_1(x) = x^2
y_2(x) = x
y(x) = y_1(x) + y_2(x)
y(x) = x^2 + x



a > 0, b < 0, c = 0
y_1(x) = x^2
y_2(x) = -x
y(x) = y_1(x) + y_2(x)
y(x) = x^2 - x



a < 0, b > 0, c = 0
y_1(x) = $-x^2$
y_2(x) = x
y(x) = y_1(x) + y_2(x)
y(x) = $-x^2$ + x



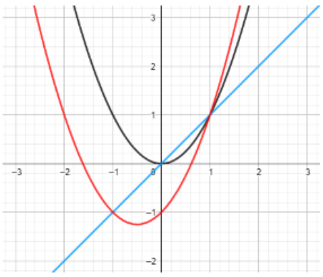
a < 0, b < 0, c = 0
y_1(x) = $-x^2$
y_2(x) = -x
y(x) = y_1(x) + y_2(x)
y(x) = $-x^2$ - x

Współczynnik c przesuwa wykres w pionie, wzdłuż osi Y.

Z postaci ogólnej funkcji kwadratowej **y(x) = ax^2 + bx + c** mamy, że: **y(0) = c**

Gdy c = 0 to wykres , wykres y(x) przecina oś Y w punkcie: P(0,c).

Przykładowo wykres funkcji **y(x) = x2 + x – 1** ma następującą postać:



Zad. 1 3.221 - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Funkcja kwadratowa F(x) ma dwa miejsca zerowe. Nie obliczając tych miejsc ustal ich znaki opierając się na wzorach Viete'a.

a) **$F(x) = x^2 + 4x + 3$**

$a = 1$, $b = 4$, $c = 3$

$x_1 \cdot x_2 = c/a \rightarrow x_1 \cdot x_2 = 3 \rightarrow$ iloczyn jest dodatni, to x_1 oraz x_2 mają takie same znaki

$x_1 + x_2 = -b/a \rightarrow x_1 + x_2 = -4 \rightarrow$ suma x_1 oraz x_2 jest ujemna, czyli obie liczby są ujemne.

- -

b) **$F(x) = x^2 +(\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6}$**

$a = 1$, $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $c = -\sqrt{6}$

$x_1 \cdot x_2 = c/a \rightarrow x_1 \cdot x_2 = -\sqrt{6} \rightarrow$ iloczyn jest ujemny, to x_1 oraz x_2 mają takie różne znaki

$x_1 + x_2 = -b/a \rightarrow x_1 + x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3} \rightarrow$ widać, że $x_1 = \sqrt{2}$ a $x_2 = -\sqrt{3}$, bo $\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{3}) = -\sqrt{6}$
Jeden pierwiastek jest dodatni, drugi ujemny.

- -

c) **F(x) = 0,5x2 -4,5x + 4**

$a = 0,5$, $b = -4,5$, $c = 4$

$x_1 \cdot x_2 = c/a \rightarrow x_1 \cdot x_2 = 4 \rightarrow$ iloczyn jest dodatni, to x_1 oraz x_2 mają takie same znaki

$x_1 + x_2 = -b/a \rightarrow x_1 + x_2 = 9 \rightarrow$ suma x_1 oraz x_2 jest dodatnia, czyli obie liczby są dodatnie.

- -

d) **$F(x) = -0,5x^2 – 7x - 24$**

$a = -0,5$, $b = -7$, $c = -24$

$x_1 \cdot x_2 = c/a \rightarrow x_1 \cdot x_2 = 48 \rightarrow$ iloczyn jest dodatni, to x_1 oraz x_2 mają takie same znaki

$x_1 + x_2 = -b/a \rightarrow x_1 + x_2 = -14 \rightarrow$ suma x_1 oraz x_2 jest ujemna, czyli obie liczby są ujemne.

Zad. 2 3.222 - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Funkcja kwadratowa F(x) ma dwa miejsca zerowe, które są liczbami całkowitymi. Wyznacz te liczby, korzystając ze wzorów Viete'a.

a) $F(x) = x^2 + 5x + 6$

$a = 1$, $b = 5$, $c = 6$

$x_1 \cdot x_2 = c/a \rightarrow x_1 \cdot x_2 = 6 \rightarrow$ iloczyn jest dodatni, to x_1 oraz x_2 mają takie same znaki

$x_1 + x_2 = -b/a \rightarrow x_1 + x_2 = -5 \rightarrow$ suma x_1 oraz x_2 s jest ujemna, , czyli obie liczby są ujemne. Zgadując mamy: $x_1 = -3$, $x_2 = -2$

- -

b) $F(x) = x^2 -2x - 8$

$a = 1$, $b = -2$, $c = -8$

$x_1 \cdot x_2 = c/a \rightarrow x_1 \cdot x_2 = -8 \rightarrow$ iloczyn jest ujemy, to x_1 oraz x_2 mają takie różne znaki

$x_1 + x_2 = -b/a \rightarrow x_1 + x_2 = 2 \rightarrow$ suma x_1 oraz x_2 s jest dodatnia , czyli zgadując mamy:

$x_1 = -2$, $x_2 = 4$

- -

c) $F(x) = x^2 -8x +7$

$a = 1$, $b = -8$, $c = 7$

$x_1 \cdot x_2 = c/a \rightarrow x_1 \cdot x_2 = 7 \rightarrow$ iloczyn jest dodatni, to x_1 oraz x_2 mają takie same znaki

$x_1 + x_2 = -b/a \rightarrow x_1 + x_2 = -8 \rightarrow$ suma x_1 oraz x_2 jest ujemna , czyli zgadując mamy:

$x_1 = 1$, $x_2 = 7$

Zad. 3 3.223 - „Zbiór zadań do liceów i techników" M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Funkcja kwadratowa F(x) ma dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2. Wyznacz współczynniki w poniższych wzorach funkcji F(x).

a) $\mathbf{F(x) = x^2 + bx + c}$ oraz $\mathbf{x_1 = -2{,}5}$ oraz $\mathbf{x_1 + x_2 = -1{,}5}$

a = 1, b = ?, c = ?

$x_1 \cdot x_2 = c/a \quad \rightarrow \quad x_1 \cdot x_2 = c$

$x_1 + x_2 = -b/a \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 = -b \quad \rightarrow \quad -1{,}5 = -b \quad \rightarrow \quad \mathbf{b = 1{,}5}$

$x_1 + x_2 = -b/a \quad \rightarrow \quad x_2 = -b/a - x_1 \quad \rightarrow \quad x_2 = -1{,}5 + 2{,}5 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1$

$c = x_1 \cdot x_2 = (-2{,}5) \cdot 1 = -2{,}5$

---

b) $\mathbf{F(x) = ax^2 + 2x + c}$ oraz $\mathbf{x_1 = -2}$ oraz $\mathbf{x_1 \cdot x_2 = -6}$

a = ?, b = 2, c = ?

$x_1 \cdot x_2 = -6 \quad \rightarrow \quad (-2) \cdot x_2 = -6 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_2 = 3}$

$x_1 + x_2 = -b/a \quad \rightarrow \quad -2 + 3 = -2/a \quad \rightarrow \quad 1 = -2/a \quad \rightarrow \quad \mathbf{a = -2}$

$x_1 \cdot x_2 = c/a \quad \rightarrow \quad c = x_1 \cdot x_2 \cdot a \quad \rightarrow \quad c = (-6)(-2) \quad \rightarrow \quad \mathbf{c = 12}$

---

c) $\mathbf{F(x) = ax^2 + bx + 42}$ oraz $\mathbf{x_2 = 7}$ oraz $\mathbf{x_1 + x_2 = 10}$

a = ?, b = ?, c = 42

$x_1 + x_2 = 10 \quad \rightarrow \quad x_1 = 10 - x_2 \quad \rightarrow \quad x_1 = 10 - 7 \quad \rightarrow \quad x_1 = 3$

$x_1 \cdot x_2 = c/a \quad \rightarrow \quad 3 \cdot 7 = 42/a \quad \rightarrow \quad a = 42/21 \quad \rightarrow \quad \mathbf{a = 2}$

$x_1 + x_2 = -b/a \quad \rightarrow \quad 10 = -b/2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{b = -20}$

Zad. 4 3.224 - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Funkcja kwadratowa $F(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, ma dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2. Określ znaki współczynników w poniższych wzorach funkcji F(x), wiedząc, że:

a) $\mathbf{F(0) = 3}$ oraz $\mathbf{x_1 > 0}$ oraz $\mathbf{x_2 > 0}$

Wiemy, że $F(0) = c$ czyli $\mathbf{c > 0}$

Wzór Viete'a: $x_1 \cdot x_2 = c/a$ $\quad x_1 > 0,\ x_2 > 0$ oraz $c > 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{a > 0}$

Wzór Viete'a: $x_1 + x_2 = -b/a$ $\quad x_1 > 0,\ x_2 > 0$ oraz $a > 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{b < 0}$

- -

b) $\mathbf{F(0) = -2}$ oraz $\mathbf{x_1 > 0}$ i $\mathbf{x_2 > 0}$

Wiemy, że $F(0) = -2$ czyli $\mathbf{c < 0}$

Wzór Viete'a: $x_1 \cdot x_2 = c/a$, $\quad x_1 > 0,\ x_2 > 0 \quad \rightarrow \quad c/a > 0 \quad \rightarrow \quad c < 0$ to $\mathbf{a < 0}$

Wzór Viete'a: $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1 > 0,\ x_2 > 0 \quad \rightarrow \quad -b/a > 0 \quad \rightarrow \quad a < 0$ to $\mathbf{b > 0}$

- -

c) $\mathbf{F(0) = 5}$ oraz $\mathbf{x_1 < 0}$ i $\mathbf{x_2 < 0}$

Wiemy, że $F(0) = c$ czyli $\mathbf{c > 0}$

Wzór Viete'a: $x_1 \cdot x_2 = c/a$, $\quad x_1 < 0,\ x_2 < 0 \quad \rightarrow \quad c/a > 0 \quad \rightarrow \quad c > 0$ to $\mathbf{a > 0}$

Wzór Viete'a: $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1 < 0,\ x_2 < 0 \quad \rightarrow \quad -b/a < 0 \quad \rightarrow \quad a > 0$ to $\mathbf{b > 0}$

Zad. 5   3.225   - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Funkcja kwadratowa $F(x) = 2x^2 + px + 10$ ma dwa miejsca zerowe, które są liczbami całkowitymi. Wyznacz te miejsca zerowe i oblicz p.

$a= 2$, $b = p$, $c = 10$

Wzór Viete'a: $x_1 \cdot x_2 = c/a$, $x_1 \cdot x_2 = 10/2$ $\rightarrow$ $x_1 \cdot x_2 = 5$

Jest to iloczyn liczb całkowitych. Zatem mamy dwa rozwiązania:

$x_1 = 1$ i $x_2 = 5$ lub $x_1 = -1$ i $x_2 = -5$

Wzór Viete'a: $x_1 + x_2 = -b/a$ $\rightarrow$ $-b = a(x_1 + x_2)$ $\rightarrow$ $b = -a(x_1 + x_2)$

Dla pierwszego rozwiązania: $b = -2(6) = -12$

Dla drugiego rozwiązania: $b = -2(-6) = 12$

Zad. 6 3.226 - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Funkcja kwadratowa $F(x) = 2x^2 -6x + q$ ma dwa miejsca zerowe, które są liczbami naturalnymi. Wyznacz te miejsca zerowe i oblicz q.

$a= 2, \ b = -6, \ c = q$

Wzór Viete'a: $x_1 \cdot x_2 = c/a$, $x_1 \cdot x_2 = q/2 \quad \rightarrow \quad q = 2x_1 \cdot x_2$

Wzór Viete'a: $x_1 + x_2 = -b/a \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad b = -a(x_1 + x_2)$

Jest to suma liczb naturalnych, czyli mogą to być: zero lub liczby całkowite dodatnie.

Mamy więc dla takiej sumy dwa rozwiązania:

$$x_1 = 0 \text{ i } x_2 = 3 \qquad \text{lub} \qquad x_1 = 1 \text{ i } x_2 = 2$$

Dla pierwszego rozwiązania: $q = = x_1 \cdot x_2/2 = 0 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad q = 0$

Dla drugiego rozwiązania: $q = 2x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad q = 4$

Zad. 7 3.227 - „Zbiór zadań do liceów i techników" M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Sprawdź, że funkcja $y(x) = 2\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3}$ ma dwa miejsca zerowe. Następnie bez obliczania tych miejsc zerowych oblicz:

a) kwadrat ich sumy,
b) sumę ich kwadratów.

$a = 2\sqrt{3}$, $b = -1$, $c = -\sqrt{3}$

$$\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4\,ac}$$

$\Delta = 1 - 4\cdot 2\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3}) = 25$, $\Delta > 0$ co oznacza, że funkcja y(x) ma dwa miejsca zerowe.

Wzór Viete'a: $x_1 + x_2 = -b/a \rightarrow x_1 + x_2 = 1/2\sqrt{3}$

$(x_1 + x_2)^2 = 1/(2\sqrt{3})^2 = 1/12 \rightarrow$ $\mathbf{(x_1 + x_2)^2 = 1/12}$

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_1\,x_2 \rightarrow (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_1\,x_2$

Wzór Viete'a: $x_1\cdot x_2 = c/a$, $x_1\cdot x_2 = -\sqrt{3}/2\sqrt{3} = -0{,}5 \rightarrow 2\cdot x_1\cdot x_2 = -1$

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_1\,x_2 \rightarrow (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 1 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 1$

$x_1^2 + x_2^2 = 1/12 + 1 \rightarrow$ $\mathbf{x_1^2 + x_2^2 = 13/12}$

Zad. 8 3.228 - „Zbiór zadań do liceów i techników" M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Sprawdź, że funkcja y(x) = $\sqrt{6}x^2 - 5\sqrt{3}x + 2\sqrt{6}$ ma dwa miejsca zerowe. Następnie bez obliczania tych miejsc zerowych oblicz:

c) sumę ich odwrotności,
d) sumę kwadratów ich odwrotności.

a= $\sqrt{6}$, b = $-5\sqrt{3}$, c = $2\sqrt{6}$

$$\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4\,ac}$$

Δ = 75 - $4\cdot\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}$ = 27, $\Delta > 0$ co oznacza, że funkcja y(x) ma dwa miejsca zerowe.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2\cdot 3}}=\frac{5}{2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2\cdot 2}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}=\frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{{x_1}^2\cdot {x_2}^2}$$

$$(x_1+x_2)^2$$

Zad. 9 3.232 - „Zbiór zadań do liceów i techników" M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Liczby 4 - 2√3 i 4 - 2√3 są miejscami zerowymi funkcji $y = x^2 + (p + q)x + p^2 - q^2$.

Oblicz p i q.

a = 1,

b = p + q

$c = p^2 - q^2$

Wzory Viete'a: Jeżeli równanie ma dwa pierwiastki, to: $\mathbf{x_1 + x_2 = -b/a}$ $\mathbf{x_1 \cdot x_2 = c/a}$

$\mathbf{x_1 + x_2 = -b/a}$

(4 - 2√3) + (4 - 2√3) = - b/a → (4 - 2√3) + (4 - 2√3) = -(p + q)

p + q = -8 → **p = -(8 + q)**

$\mathbf{x_1 \cdot x_2 = c/a}$

(4 - 2√3)·(4 - 2√3) = c/a → (4 - 2√3) · (4 - 2√3) = $p^2 - q^2$

16 – 12 = $p^2 - q^2$ → $p^2 - q^2 = 4$

$(8 + q)^2 - q^2 = 4$ → $64 + 16q + q^2 - q^2 = 4$ → 16q = -60 → q = -60/16

$$\boldsymbol{q = -3\frac{3}{4}}$$

p = -(8 + q) → p$= -8 + 3\frac{3}{4} = -\frac{32}{4} + 3\frac{3}{4} = -\frac{32}{4} + \frac{15}{4} = -\frac{17}{4} = -4\frac{1}{4}$

$$\boldsymbol{p = -4\frac{1}{4}}$$

Zad. 10 3.233 - „Zbiór zadań do liceów i techników" M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Liczby $1/(2 - \sqrt{3})$ oraz $1/(2 + \sqrt{3})$ są rozwiązaniem równania $x^2 - (p + q)x + q^2 – 8p = 0$.

Oblicz p i q.

$a = 1$,

$b = -(p + q)$

$c = q^2 – 8p$

Wzory Viete'a: Jeżeli równanie ma dwa pierwiastki, to: $\mathbf{x_1 + x_2 = -b/a}$ $\mathbf{x_1 \cdot x_2 = c/a}$

$\mathbf{x_1 + x_2 = -b/a}$

$x_1 + x_2 = p + q$ $\frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} = p + q \rightarrow \frac{(2-\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3}) \cdot (2+\sqrt{3})} = p + q \rightarrow \frac{4}{1} = p + q$

$p + q = 4 \rightarrow$ $\mathbf{p = 4 - q}$

$\mathbf{x_1 \cdot x_2 = c/a}$

$x_1 \cdot x_2 = q^2 – 8p$ $\frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{3}} = q^2 - 8p \rightarrow \frac{1}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = q^2 - 8p$

$\frac{1}{4-3} = q^2 - 8p \rightarrow$ $q^2 – 8p = 1$

Podstawiając $p = 4 - q$ otrzymujemy: $q^2 – 8(4 – q) = 1 \rightarrow q^2 – 8(4 – q) - 1 = 0$

a stąd:

$$q^2 + 8q - 33 = 0$$

$\Delta = 8^2 – 4(1)(-33) = 196$ $\sqrt{196} = 14$

Mamy $q_1 = (-8 + 14)/2$ $\mathbf{q_1 = 3}$, to wtedy $p = 4 – q$, czyli $\mathbf{p = 1}$

oraz $q_2 = (-8 - 14)/2$ $\mathbf{q_2 = -11}$, to wtedy $p = 4 – q$, czyli $\mathbf{p = 15}$