

Zbiór zadań z matematyki jakie przerabiałem z moimi Bambikami.

Zbiór ten zawiera zadania ułożone przeze mnie oraz rozwiązania zadań zaczerpniętych z różnych źródeł. Między innymi są tu zadania z podręczników szkolnych lub zbiorów zadań wykorzystywanych w szkołach. Jest naturalne, że treść moich zadań jest też często w jakiejś części inspirowana zadaniami z jakimi się spotkałem przeglądając różne źródła.

Ogólnie, jeśli zamieszczam tu rozwiązanie zadania z jakiegoś źródła staram się wskazać autorów tego zadania lub podać inną wskazówkę do oryginalnej treści zadania.

- Polecam dla dogłębniejszego poćwiczenia rozwiązywania tego typu zagadnień „Podręcznik do liceów i techników - MATEMATYKA” oraz „Zbiór zadań do liceów i techników - MATEMATYKA” autorstwa M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda.

Jeśli zdecydujesz się na przerobienie tego bardzo ambitnego kursu, to z pewnością przydadzą Ci się te strony:

<https://skul.pl/matematyka/matematyka-klasa-2-podrecznik-zakres-rozszerzony-rozwiazania-i-odpowiedzi.kid,721>

<https://skul.pl/matematyka/matematyka-klasa-2-zbior-zadan-zakres-rozszerzony-rozwiazania-i-odpowiedzi.kid,1287>

- W przypadku zadań dotyczących funkcji matematycznych szczególnie polecam korzystanie ze strony internetowej: **<https://www.geogebra.org/graphing?lang=pl>**.

www.geogebra.org/graphing?lang=pl

Większość zamieszczonych tu wykresów sporządziłem korzystając z tego narzędzia.

Równania kwadratowe i nierówności z parametrem

Leksykon

Funkcja kwadratowa w postaci ogólnej: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Wartości x dla których $y(x) = 0$ nazywamy miejscami zerowymi $\rightarrow ax^2 + bx + c = 0$

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

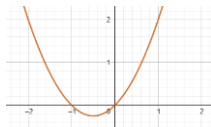
Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Jej wierzchołek ma współrzędne (p, q) , gdzie:

$$p = \frac{-b}{2a} \quad q = \frac{-\Delta}{4a}$$

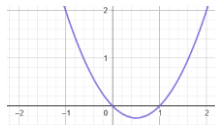
$a > 0$



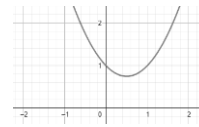
x^2



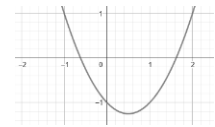
$x^2 + x$



$x^2 - x$



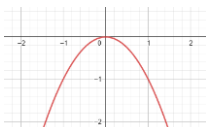
$x^2 - x + 1$



$x^2 - x - 1$

Gdy $c = 0$, to jedno miejsce zerowe funkcji $[y(x) = 0]$ jest dla $x = 0$.

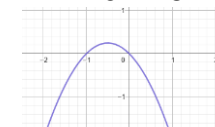
$a < 0$



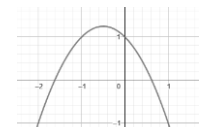
$-x^2$



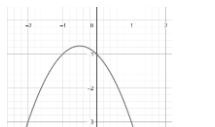
$-x^2 + x$



$-x^2 - x$



$-x^2 - x + 1$



$-x^2 - x - 1$

Gdy $c = 0$, to jedno miejsce zerowe funkcji

- Gdy $b = 0$, to współrzędna x wierzchołka paraboli jest równa $x = 0$. $b \neq 0$ przesuwa wykres w poziomie. Gdy $b = 0$, to parabola jest symetryczna względem osi Y . Dla $a > 0$. $b > 0$ wykres przesuwa się w lewo, $b < 0$ wykres przesuwa się w prawo. Dla $a < 0$. $b > 0$ wykres przesuwa się w prawo, $b < 0$ wykres przesuwa się w lewo.
- Z postaci ogólnej funkcji kwadratowej mamy, że $f(0) = c$, wykres przecina oś Y w c .
Gdy $c = 0$, to jedno miejsce zerowe jest w $x = 0$. $c \neq 0$ przesuwa wykres w pionie.

- Współrzędna $x_w = p$ wierzchołka paraboli leży pośrodku między wartościami x określającymi miejsca zerowe funkcji. Mamy więc x_1 , x_w , x_2 . Odległość $|x_1 - x_w|$ jest równa $|x_2 - x_w|$.
 $x_w = p = (x_1 + x_2)/2$.

Gdy mamy funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$ i znamy miejsca zerowe tej funkcji x_1 oraz x_2 , to możemy zapisać tę funkcję w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \rightarrow \quad b = a(x_1 + x_2) \quad c = ax_1x_2$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

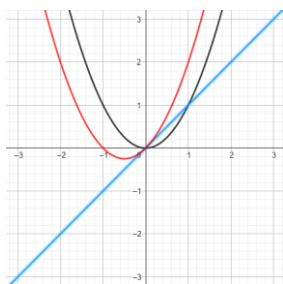
$$f(x) = a(x - p)^2 + q \quad \rightarrow \quad b = -2ap \quad c = ap^2 + q$$

Wzory Viete'a: Jeżeli równanie ma dwa pierwiastki, to: $x_1 + x_2 = -b/a$ $x_1 \cdot x_2 = c/a$ W wielu zadaniach wyznacza się wartość wyrażenia: $x_1^2 + x_2^2$. Warto więc ją wyliczyć ogólnie.

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Z wzoru Viete'a mamy, że: $x_1 + x_2 = -b/a$ $x_1 \cdot x_2 = c/a$

$$\text{Zatem: } x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$



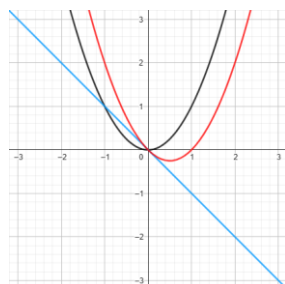
$a > 0, b > 0, c = 0$

$$y_1(x) = x^2$$

$$y_2(x) = x$$

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

$$y(x) = x^2 + x$$



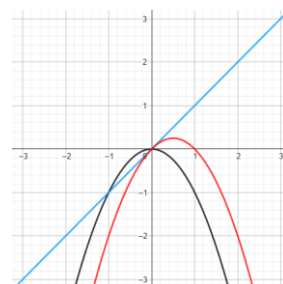
$a > 0, b < 0, c = 0$

$$y_1(x) = x^2$$

$$y_2(x) = -x$$

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

$$y(x) = x^2 - x$$



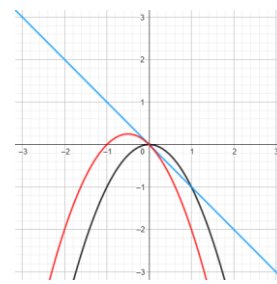
$a < 0, b > 0, c = 0$

$$y_1(x) = -x^2$$

$$y_2(x) = x$$

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

$$y(x) = -x^2 + x$$



$a < 0, b < 0, c = 0$

$$y_1(x) = -x^2$$

$$y_2(x) = -x$$

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

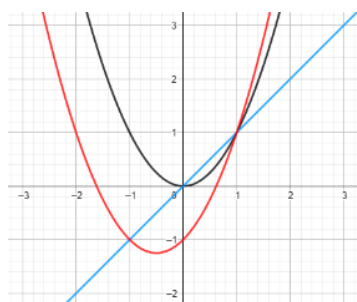
$$y(x) = -x^2 - x$$

Współczynnik c przesuwa wykres w pionie, wzdłuż osi Y .

Z postaci ogólnej funkcji kwadratowej $y(x) = ax^2 + bx + c$ mamy, że: $y(0) = c$

Gdy $c = 0$ to wykres, wykres $y(x)$ przecina oś Y w punkcie: $P(0, c)$.

Przykładowo wykres funkcji $y(x) = x^2 + x - 1$ ma następującą postać:



$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = x$$

$$f(x) = x^2 + x - 1$$

Zad. 1

Wyznacz liczbę rozwiązań równania $mx^2 + 2x + m = 0$ ze względu na wartość parametru m . Naszkicuj wykres funkcji $g(m)$, która każdej wartości parametru m przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania.

Równanie przyjmie postać równania liniowego, gdy $m = 0$, bowiem wtedy mamy: $2x = 0$

Dla takiego równania mamy jedno rozwiązanie: $x = 0$

Aby wyznaczyć liczbę rozwiązań równania kwadratowego $mx^2 + 2x + m = 0$ w zależności od wartości parametru $m \neq 0$, musimy obliczyć wyróżnik (Δ - delta) tego równania kwadratowego. Wyróżnik jest dany wzorem:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Dla naszego równania $a = m$, $b = 2$, $c = m$, więc:

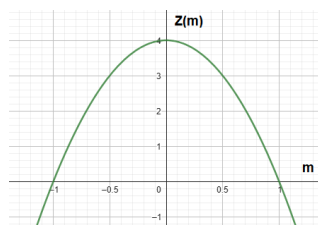
$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot m \cdot m = 4 - 4m^2$$

Liczba rozwiązań równania zależy od wartości wyróżnika:

- Jeśli $\Delta > 0$, równanie ma dwa różne rozwiązania.
- Jeśli $\Delta = 0$, równanie ma jedno podwójne rozwiązanie.
- Jeśli $\Delta < 0$, równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych.

$$Z(m) = \Delta \qquad Z(m) = -4m^2 + 4$$

$$\Delta_z = 0^2 + 64 \quad \sqrt{64} = 8 \quad z_1 = (0 - 8)/-8 = 1 \quad z_2 = (0 + 8)/8 = 1$$

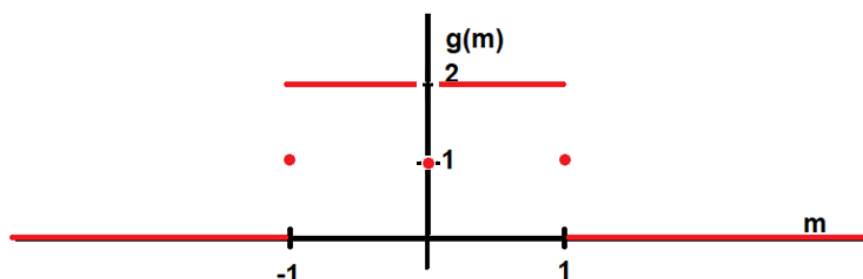


Mamy dwa różne rozwiązania gdy $Z(m) > 0$. A jest to dla przedziału $m \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

Mamy jedno rozwiązanie gdy $Z(m) = 0$, czyli gdy m ma wartości -1 lub 1 . $m \in \{-1, 1\}$

Nie ma rozwiązań gdy $Z(m) < 0$. Zachodzi to dla przedziałów $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Wykres funkcji $g(m)$ sporządzamy w oparciu o znalezione wyżej cztery rozwiązania.



Zad. 1**Rozwiązanie zaproponowane przez AI (Artificial Intelligence – Sztuczna Inteligencja)**

Aby wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $mx^2 + 2x + m = 0$ w zależności od wartości parametru (m), musimy obliczyć wyróżnik (delta) tego równania kwadratowego. Wzór na wyróżnik to:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

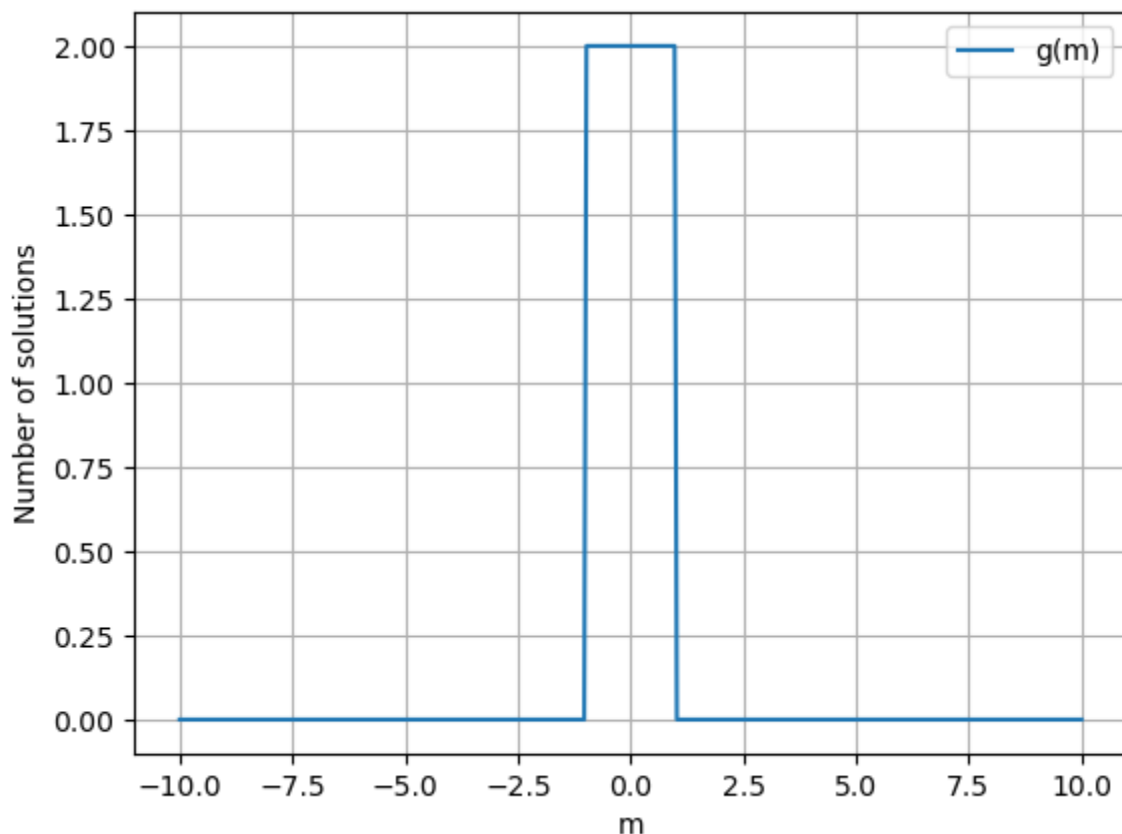
W naszym przypadku $a = m$, $b = 2$, $c = m$, więc:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot m \cdot m = 4 - 4m^2$$

Liczba rozwiązań równania zależy od wartości wyróżnika:

- Jeśli ($\Delta > 0$), równanie ma dwa różne rozwiązania.
- Jeśli ($\Delta = 0$), równanie ma jedno podwójne rozwiązanie.
- Jeśli ($\Delta < 0$), równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Wykres funkcji $g(m)$, która każdej wartości parametru (m) przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania:



Uwagi: AI sporządziła niezbyt poprawnie wykres oraz nie uwzględniła, że dla $m = 0$ równanie powyższe kwadratowe stanie się równaniem liniowym i będzie miało jedno rozwiązanie.

Zad 2

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + (m - 3)x + m^2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

$$a = 1, \quad b = m - 3, \quad c = m^2$$

$$\Delta = (m-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m^2 \rightarrow \Delta = m^2 - 6m + 9 - 4m^2 \rightarrow \Delta = -3m^2 - 6m + 9$$

Aby równanie miało dwa różne rozwiązania, to musi być spełniony związek $\Delta > 0$

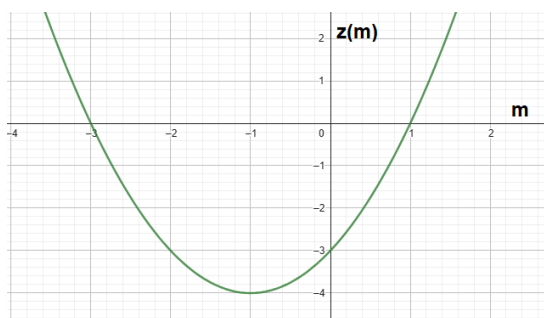
$$-3m^2 - 6m + 9 > 0 \quad \text{czyli:} \quad 3m^2 + 6m - 9 < 0$$

Dzielimy to równanie obustronnie przez 3 i dostajemy: $m^2 + 2m - 3 < 0$

Zatem musimy wyznaczyć przedział wartości m , dla których funkcja $z(m) = m^2 + 2m - 3$ jest mniejsza od zera.

$$\Delta_z = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 \quad \sqrt{16} = 4$$

$$z_1 = (-2 - 4)/2 = -3 \quad z_2 = (-2 + 4)/2 = 1$$



Funkcja $z(m) < 0$ dla przedziału $m \in (-3, 1)$

W zadaniu żąda się aby wskazać wartości m , dla których oba rozwiązania są dodatnie.

Zatem: $x_1 \cdot x_2 > 0$ oraz $x_1 + x_2 > 0$ Z wzorów Viete'a mamy: $x_1 + x_2 = -b/a$ $x_1 \cdot x_2 = c/a$

$c/a > 0$ oraz $-b/a > 0$. Zatem: $m^2 > 0$ oraz $3 - m > 0$

Stąd: m musi być różne od zera 0 oraz $m < 3$

Łącząc te dwa warunki mamy, że: $0 < m < 1 \rightarrow m \in (0, 1)$

Zad. 2A1

Rozwiązanie zaproponowane przez AI (Artificial Intelligence – Sztuczna Inteligencja)

Aby równanie kwadratowe $x^2 + (m - 3)x + m^2 = 0$ miało dwa różne rozwiązania dodatnie, muszą być spełnione następujące warunki:

1. Delta (Δ) musi być większa od zera: $\Delta = (m - 3)^2 - 4m^2 > 0$

2. Oba rozwiązania muszą być dodatnie: $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$

Po rozwiązaniu tych warunków, otrzymujemy:

$$m \in (-3, 0) \vee (0, 1)$$

Zad. 3

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których nierówność $(m-2)x^2 + mx + (m-2) > 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.

$$a = m - 2, \quad b = m, \quad c = m - 2$$

W zadaniu pytają dla jakich wartości m funkcja $y(x) = (m-2)x^2 + mx + (m-2)$ będzie miała dla wszystkich x wartości większe od zera. Zatem musi ona wyglądać następująco.

Parabola musi mieć ramiona skierowane do góry i być ponad osią X .



Zatem, warunki zadania będą spełnione gdy: $a > 0$ oraz $\Delta < 0$

$$1^0 \quad a > 0 \quad \text{gdy} \quad m - 2 > 0, \quad \text{czyli} \quad \mathbf{m > 2}$$

$$2^0 \quad \Delta < 0 \quad \text{gdy} \quad m^2 - 4(m-2)(m-2) < 0 \quad z(m) = m^2 - 4(m-2)(m-2)$$

$$z(m) = m^2 - 4(m^2 - 4m + 4) \rightarrow z(m) = -3m^2 + 16m - 16$$

Mamy sprawdzić kiedy $z(m) < 0$

$$\Delta_z = 16^2 - 4(-3)(-16) = 256 - 192 = 64 \quad \sqrt{64} = 8$$

$$z_1 = (-16 - 8)/-6 = 4 \quad z_2 = (-16 + 8)/-6 = 4/3$$

Wykres $z(m)$

$z(m) < 0$ gdy:

$$\mathbf{m \in (-\infty, 4/3) \vee (4, +\infty)}$$



Łącząc obydwa warunki 1^0 oraz 2^0 mamy, że $\mathbf{m > 4}$

Zad. 3A1

Rozwiązanie zaproponowane przez AI (Artificial Intelligence – Sztuczna Inteligencja)

Aby nierówność $((m-2)x^2 + mx + (m-2) > 0)$ była spełniona dla każdej liczby rzeczywistej (x) , wyrażenie kwadratowe musi być dodatnio określone. Oznacza to, że wyróżnik (delta) musi być mniejszy od zera, a współczynnik przy (x^2) musi być dodatni.

$$1. \quad \text{Wyróżnik (delta) mniejszy od zera: } \Delta = m^2 - 4(m-2)(m-2) < 0$$

$$2. \quad \text{Współczynnik przy } (x^2) \text{ dodatni: } m-2 > 0 \rightarrow m > 2$$

Rozwiązując obie te nierówności, otrzymujemy: $m > 4$

Zatem nierówność $(m-2)x^2 + mx + (m-2) > 0$ jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej (x) , gdy $\mathbf{m > 4}$.

Zad. 4

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których pierwiastki równania $x^2 - (m - 3)x + m = 0$ spełniają warunek $x_1^2 + x_2^2 = 2m + 9$.

$$a = 1, \quad b = -(m - 3) = 3 - m, \quad c = m$$

Skorzystajmy z formuły wynikającej z wzorów Viete'a

$$z = x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$z = (3 - m)^2 - 2 \cdot 1 \cdot m = 9 - 6m + m^2 - 2m = m^2 - 8m + 9$$

$$\text{Z zadania mamy, że } z = 2m + 9. \quad \text{Zatem: } m^2 - 8m + 9 = 2m + 9$$

$$\text{Stąd: } m^2 - 10m = 0 \quad \rightarrow \quad m(m - 10) = 0$$

$$\text{Rozwiązaniem są więc dwie wartości: } \quad \mathbf{m = 0} \quad \text{oraz} \quad m - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{m = 10}$$

Zad. 4AI

Rozwiązanie zaproponowane przez AI (*Artificial Intelligence – Sztuczna Inteligencja*)

Aby znaleźć wartości parametru (m), dla których pierwiastki równania kwadratowego

$x^2 - (m - 3)x + m = 0$ spełniają warunek $x_1^2 + x_2^2 = 2m + 9$, możemy postępować następująco:

1. Zastosowanie wzorów Viete'a:

- Suma pierwiastków: $x_1 + x_2 = m - 3$
- Iloczyn pierwiastków: $x_1 \cdot x_2 = m$

2. Warunek na sumę kwadratów pierwiastków:

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
- Podstawiając wzory Viete'a: $x_1^2 + x_2^2 = (m - 3)^2 - 2m$

3. Równanie do rozwiązania:

- $((m - 3)^2 - 2m = 2m + 9)$
- Rozwiązując to równanie, otrzymujemy: $m^2 - 8m + 9 = 0$

4. **Rozwiązanie równania kwadratowego:**

- $\mathbf{m = 0}$ lub $\mathbf{m = 10}$

Zatem wartości parametru (m), dla których pierwiastki równania spełniają podany warunek, to **0 i 10**.