

Zbiór zadań z matematyki jakie przerabiałem z moimi Bambikami.

Zbiór ten zawiera zadania ułożone przeze mnie oraz rozwiązania zadań zaczerpniętych z różnych źródeł. Między innymi są tu zadania z podręczników szkolnych lub zbiorów zadań wykorzystywanych w szkołach. Jest naturalne, że treść moich zadań jest też często w jakiejś części inspirowana zadaniami z jakimi się spotkałem przeglądając różne źródła.

Ogólnie, jeśli zamieszczam tu rozwiązanie zadania z jakiegoś źródła staram się wskazać autorów tego zadania lub podać inną wskazówkę do oryginalnej treści zadania.

- Polecam dla dogłębniejszego poćwiczenia rozwiązywania tego typu zagadnień „Podręcznik do liceów i techników - MATEMATYKA” oraz „Zbiór zadań do liceów i techników - MATEMATYKA” autorstwa M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda.

Jeśli zdecydujesz się na przerobienie tego bardzo ambitnego kursu, to z pewnością przydadzą Ci się te strony:

<https://skul.pl/matematyka/matematyka-klasa-2-podrecznik-zakres-rozszerzony-rozwiazania-i-odpowiedzi,kid,721>

<https://skul.pl/matematyka/matematyka-klasa-2-zbior-zadan-zakres-rozszerzony-rozwiazania-i-odpowiedzi,kid,1287>

- W przypadku zadań dotyczących funkcji matematycznych szczególnie polecam korzystanie ze strony internetowej: **<https://www.geogebra.org/graphing?lang=pl>**.

www.geogebra.org/graphing?lang=pl

Większość zamieszczonych tu wykresów sporządziłem korzystając z tego narzędzia.

Równania kwadratowe z parametrem

Leksykon

Funkcja kwadratowa w postaci ogólnej: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Wartości x dla których $y(x) = 0$ nazywamy miejscami zerowymi $\rightarrow ax^2 + bx + c = 0$

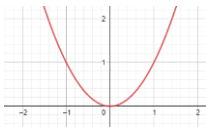
Miejsca zerowe funkcji kwadratowej:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

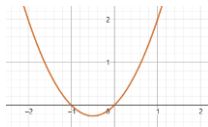
Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Jej wierzchołek ma współrzędne (p, q) , gdzie:

$$p = \frac{-b}{2a} \quad q = \frac{-\Delta}{4a}$$

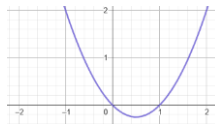
$a > 0$



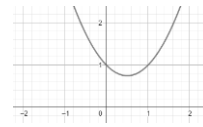
x^2



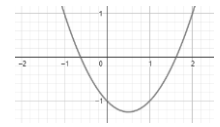
$x^2 + x$



$x^2 - x$



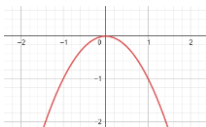
$x^2 - x + 1$



$x^2 - x - 1$

Gdy $c = 0$, to jedno miejsce zerowe funkcji $[y(x) = 0]$ jest dla $x = 0$.

$a < 0$



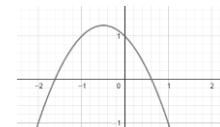
$-x^2$



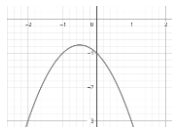
$-x^2 + x$



$-x^2 - x$



$-x^2 - x + 1$



$-x^2 - x - 1$

Gdy $c = 0$, to jedno miejsce zerowe funkcji

- Gdy $b = 0$, to współrzędna x wierzchołka paraboli jest równa $x = 0$. $b \neq 0$ przesuwa wykres w poziomie. Gdy $b = 0$, to parabola jest symetryczna względem osi Y . Dla $a > 0$. $b > 0$ wykres przesuwa się w lewo, $b < 0$ wykres przesuwa się w prawo. Dla $a < 0$. $b > 0$ wykres przesuwa się w prawo, $b < 0$ wykres przesuwa się w lewo.
- Z postaci ogólnej funkcji kwadratowej mamy, że $f(0) = c$, wykres przecina oś Y w c .
Gdy $c = 0$, to jedno miejsce zerowe jest w $x = 0$. $c \neq 0$ przesuwa wykres w pionie.
- Współrzędna $x_w = p$ wierzchołka paraboli leży pośrodku między wartościami x określającymi miejsca zerowe funkcji. Mamy więc x_1 , x_w , x_2 . Odległość $|x_1 - x_w|$ jest równa $|x_2 - x_w|$.
 $x_w = p = (x_1 + x_2)/2$.

Gdy mamy funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$ i znamy miejsca zerowe tej funkcji x_1 oraz x_2 , to możemy zapisać tę funkcję w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \rightarrow \quad b = a(x_1 + x_2) \quad c = ax_1x_2$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

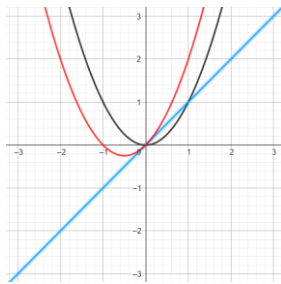
$$f(x) = a(x - p)^2 + q \quad \rightarrow \quad b = -2ap \quad c = ap^2 + q$$

Wzory Viete'a: Jeżeli równanie ma dwa pierwiastki, to: $x_1 + x_2 = -b/a$ $x_1 \cdot x_2 = c/a$
wielu zadaniach wyznacza się wartość wyrażenia: $x_1^2 + x_2^2$. Warto więc ją wyliczyć ogólnie.

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Z wzoru Viete'a mamy, że: $x_1 + x_2 = -b/a$ $x_1 \cdot x_2 = c/a$

$$\text{Zatem: } x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$



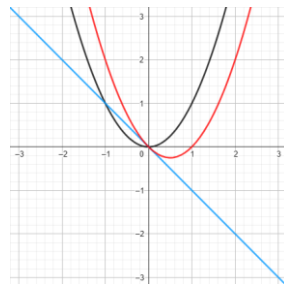
$a > 0, b > 0, c = 0$

$$y_1(x) = x^2$$

$$y_2(x) = x$$

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

$$y(x) = x^2 + x$$



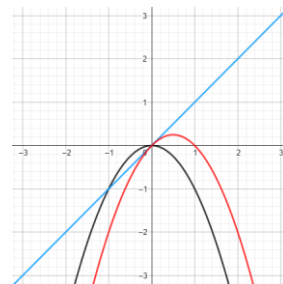
$a > 0, b < 0, c = 0$

$$y_1(x) = x^2$$

$$y_2(x) = -x$$

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

$$y(x) = x^2 - x$$



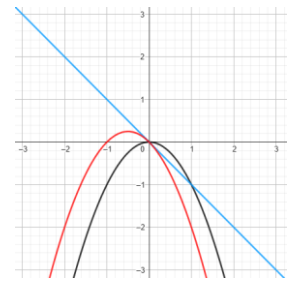
$a < 0, b > 0, c = 0$

$$y_1(x) = -x^2$$

$$y_2(x) = x$$

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

$$y(x) = -x^2 + x$$



$a < 0, b < 0, c = 0$

$$y_1(x) = -x^2$$

$$y_2(x) = -x$$

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

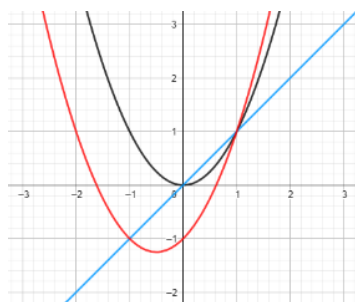
$$y(x) = -x^2 - x$$

Współczynnik c przesuwa wykres w pionie, wzdłuż osi Y .

Z postaci ogólnej funkcji kwadratowej $y(x) = ax^2 + bx + c$ mamy, że: $y(0) = c$

Gdy $c = 0$ to wykres, wykres $y(x)$ przecina oś Y w punkcie: $P(0, c)$.

Przykładowo wykres funkcji $y(x) = x^2 + x - 1$ ma następującą postać:



$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = x$$

$$f(x) = x^2 + x - 1$$

W pierwszym zadaniu rozpatrzono przypadek równania liniowego, czyli takiego które albo nie ma rozwiązań, albo ma dokładnie jedno rozwiązanie, albo każda liczba rzeczywista jest jego rozwiązaniem. Jest to równanie z parametrem. Na jego przykładzie można się zapoznać w jaki sposób wyznacza się wartości parametru przy założonych w treści zadania warunkach.

Zad. 1a

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których dane równanie ma rozwiązanie będące liczbą dodatnią.

$$mx + 10 = 15$$

Rozwiązanie tego równanie jest proste: $mx = 5 \rightarrow x = 5/m$

Oczywiście taki iloraz możemy policzyć tylko wtedy, gdy: $m \neq 0$

To jest nasz pierwszy warunek jaki muszą spełniać wartości parametru m . $m \in \mathbb{R} - \{0\}$

Wartość x jest dodatnia ($x > 0$), czyli gdy: $5/m > 0$

Kiedy ten warunek jest spełniony? Widać, że dla wszystkich dodatnich m , czyli $m > 0$.

Moglibyśmy to zapisać jako: $m \in (0, +\infty)$.

Po tych rozważaniach mamy wartości m dla dwu warunków:

$$m \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{oraz} \quad m \in (0, +\infty)$$

Część wspólna obu warunków, to: $m \in \mathbb{R}^+$

Uwaga

Symbol \mathbb{R}^+ oznacza wszystkie liczby rzeczywiste o znaku dodatnim, czyli większe od zera. Zero nie ma znaku.

Zad. 1b

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , $m \in \mathbb{R}$, dla których dane równanie kwadratowe ma przynajmniej jedno rozwiązanie:

$$x^2 + (m - 5)x + 0,25 = 0$$

Mamy: $a = 1$, $b = m - 5$, $c = 0,25$

Aby równanie $y = ax^2 + bx + c$ miało jedno lub dwa rozwiązania, to:

1° $a = 0 \vee b \neq 0$ **lub** $a \neq 0 \vee \Delta \geq 0$ - musi być spełniony jeden z tych warunków

Widzimy, że $a = 1$, czyli nie będziemy rozważać pierwszego warunku, bowiem $a \neq 0$.

2° Drugi warunek: $a \neq 0$ oraz $\Delta \geq 0$ Mamy $a \neq 0$ dla każdego $m \in \mathbb{R}$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (m - 5)^2 - 4(1)(0,25) \quad z(m) = \Delta = (m^2 - 10m + 25) - 1 = m^2 - 10m + 24$$

$$z(m) = m^2 - 10m + 24 \geq 0$$

Kiedy ten warunek jest spełniony?

Obliczamy Δ_m dla równania $z(m) = 0$: $\Delta_m = 100 - 96 = 4$

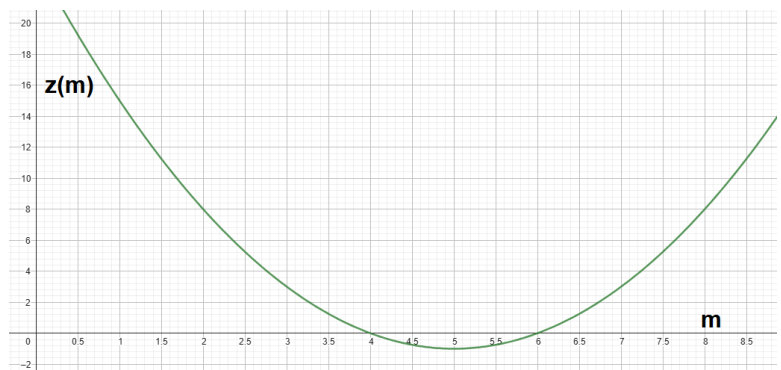
$\Delta_m > 0$, czyli równanie $z(m) = 0$ ma dwa pierwiastki.

$$m_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{oraz} \quad m_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$m_1 = (10 - 2)/2 = 4 \quad \text{oraz} \quad m_2 = (10 + 2)/2 = 6$$

Wykres funkcji $z(m)$ ma postać.

Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(m)$ współczynnik $a > 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do góry. Parabola przecina oś M w punktach 4 oraz 6.



Wniosek, mamy $z(m) = \Delta_m \geq 0$ w przedziałach $(-\infty, 4>$ oraz $<6, +\infty)$.

Zatem rozwiązaniem dla warunku $z(m) \geq 0$ jest $m \in (-\infty, 4> \vee <6, +\infty)$.

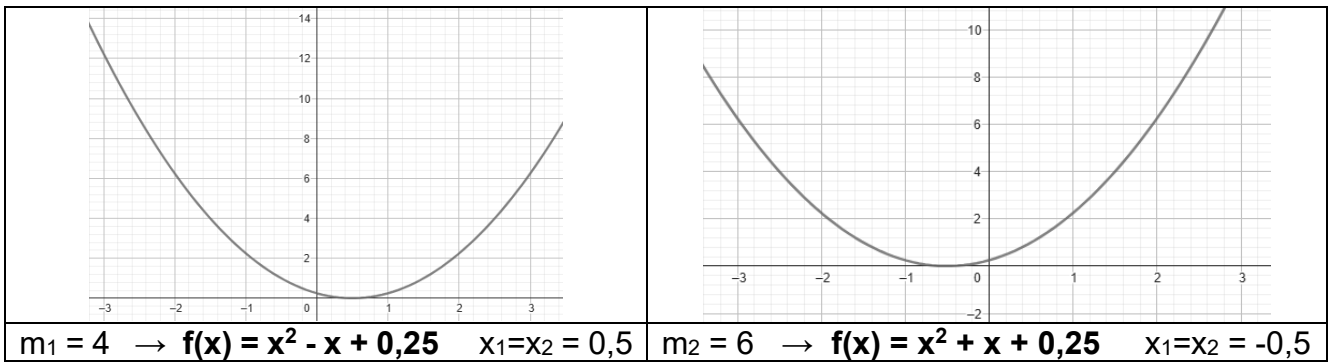
Po tych rozważaniach wiemy, że wartość m musi spełniać następujące warunki:

$$m \in \mathbb{R} \quad \text{oraz} \quad \text{jednocześnie} \quad m \in (-\infty, 4> \vee <6, +\infty)$$

Część wspólna obu warunków, to: $m \in (-\infty, 4> \vee <6, +\infty)$

Sprawdźmy nasze rozwiązanie dla znalezionych wartości: $m_1 = 4$ i $m_2 = 6$.

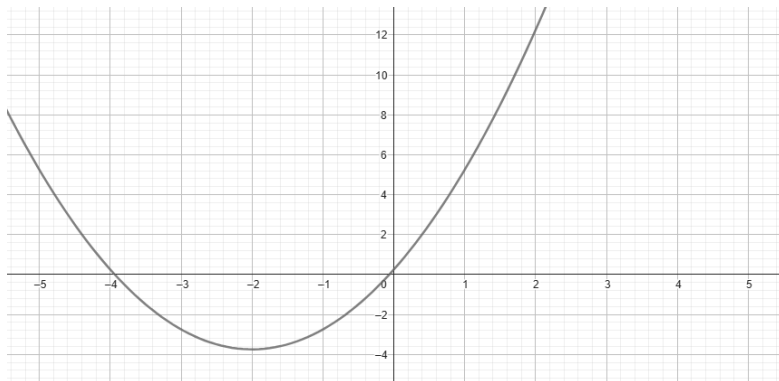
Sporządźmy wykresy funkcji $f(x) = x^2 + (m - 5)x + 0,25$ dla tych wartości m .



Wartości $m_1 = 4$ i $m_2 = 6$ odpowiadają przypadkom, gdy rozpatrywane równanie ma jedno rozwiązanie.

Przykładowo,

dla $m = 9$ (wartość z przedziału $<6, +\infty$) wykres funkcji $f(x) = x^2 + (m - 5)x + 0,25$ ma następującą postać:



Wykres funkcji:

$$f(x) = x^2 + 4x + 0,25$$

Dla $m = 9$ rozpatrywane równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = -3,94$ oraz $x_2 = -0,06$.

Zad. 2a 3.242a - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , $m \in \mathbb{R}$, dla których dane równanie ma dwa rozwiązania:

$$(m - 2)x^2 + (m + 5)x - m - 1 = 0$$

Mamy: $a = m - 2$, $b = m + 5$, $c = -m - 1 = -(m + 1)$

Aby to równanie miało dwa rozwiązania, to:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \text{ muszą być spełnione łącznie oba te warunki } a \neq 0 \cap \Delta > 0$$

1° $a \neq 0 \rightarrow m - 2 \neq 0$, czyli $m \neq 2$

Pierwszy warunek jest spełniony dla: $m \in \mathbb{R} - \{2\}$

2° Drugi warunek: $\Delta > 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (m + 5)^2 + 4(m - 2)(m + 1) & z(m) &= \Delta = m^2 + 10m + 25 + 4(m^2 + m - 2m - 2) \\ & & z(m) &= 5m^2 + 6m + 17 > 0 \end{aligned}$$

Kiedy ten warunek jest spełniony?

Obliczamy Δ_z dla równania $z(m) = 0$: $\Delta_z = 36 - 4(5)(17) = -304$

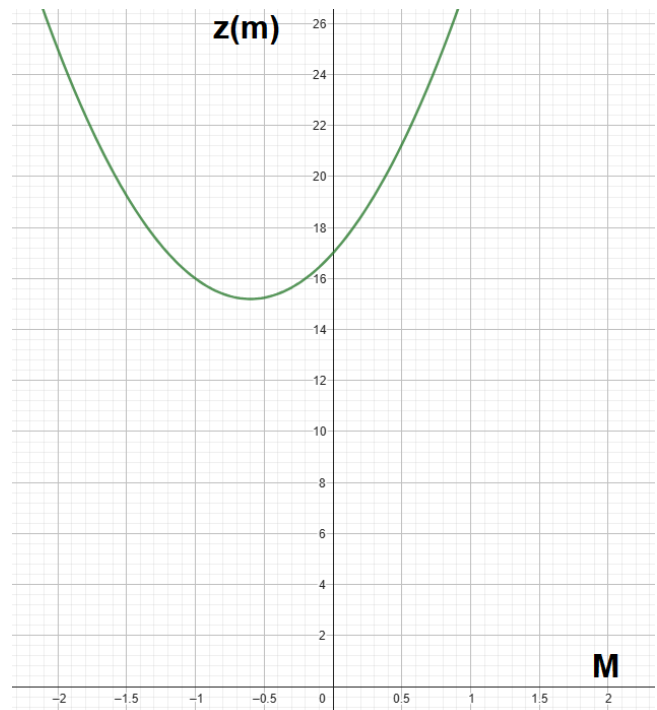
$\Delta_z < 0$, czyli równanie $z(m) = 0$ nie ma miejsc zerowych.

Wykres funkcji $z(m)$ ma postać.

Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(m)$ współczynnik $a > 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do góry. Wobec $\Delta_z < 0$ (parabola nie przecina osi M) parabola, będąca wykresem $z(m)$, jest nad osią M .

Zatem rozwiązaniem dla warunku:

$$z(m) > 0 \text{ jest } m \in \mathbb{R}$$



Po tych rozważaniach wiemy, że wartość m musi spełniać następujące warunki:

$$m \in \mathbb{R} - \{2\} \text{ oraz jednocześnie } m \in \mathbb{R}$$

Część wspólna obu warunków, to: $m \in \mathbb{R} - \{2\}$

Zad. 2b 3.242b - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , $m \in \mathbb{R}$, dla których dane równanie ma dwa rozwiązania:

$$(m + 2)x^2 - 2x + m + 2 = 0$$

Mamy: $a = m + 2$, $b = -2$, $c = m + 2$

Aby to równanie miało dwa rozwiązania, to:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \text{ muszą być spełnione łącznie oba te warunki } a \neq 0 \cap \Delta > 0$$

$a \neq 0 \rightarrow m + 2 \neq 0$, czyli $m \neq -2$

1° Pierwszy warunek jest spełniony dla: $m \in \mathbb{R} - \{-2\}$

2° Drugi warunek: $\Delta > 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 2^2 - 4(m + 2)(m + 2) \quad z(m) = \Delta = 4 - 4(m^2 + 4m + 16) = 4 - 4m^2 - 16m - 16$$

$$z(m) = -4m^2 - 16m - 12 > 0$$

Kiedy ten warunek jest spełniony?

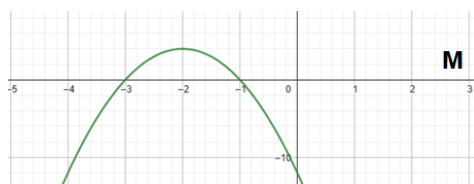
Obliczamy Δ_z dla równania $z(m) = 0$: $\Delta_z = 256 - 4(-4)(-4) = 64$

$\Delta_z > 0$, czyli równanie $z(m) = 0$ ma dwa pierwiastki.

$$m_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{oraz} \quad m_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$m_1 = -1 \quad \text{oraz} \quad m_2 = -3$$

Wykres funkcji $z(m)$ ma formę:



Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(m)$ współczynnik $a < 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do dołu. Parabola przecina oś M w punktach -1 oraz -3 .

Wniosek, mamy $z(m) = \Delta_z > 0$ w przedziale $(-3, -1)$.

Zatem rozwiązaniem dla warunku $z(m) > 0$ jest $m \in (-3, -1)$

Po tych rozważaniach wiemy, że wartość m musi spełniać następujące warunki:

$$m \in \mathbb{R} - \{-2\} \quad \text{oraz} \quad \text{jednocześnie} \quad m \in (-3, -1)$$

Część wspólna obu warunków, to: $m \in (-3, -2) \vee (-2, -1)$

Zad. 3a 3.243a - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Wyznacz wszystkie wartości parametru k , $k \in \mathbb{R}$, dla których dane równanie:

$$8(k^2 - 1)x^2 + (8k - 8)x + 1 = 0 \quad \text{nie ma rozwiązań}$$

$$\text{Mamy: } a = 8(k^2 - 1), \quad b = 8k - 8, \quad c = 1$$

Aby to równanie nie miało rozwiązań, to muszą być spełnione warunki:

$$a = 0 \cap b = 0 \quad \text{lub} \quad a \neq 0 \cap \Delta < 0 \quad - \text{ musi być spełniony jeden z tych warunków}$$

1°

$$a = 0$$

$$8(k^2 - 1) = 0 \rightarrow k^2 - 1 = 0 \rightarrow k^2 = 1 \\ k = \pm 1$$

$$b = 0$$

$$8k - 8 = 0 \rightarrow k - 1 = 0 \rightarrow k = 1 \\ k = 1$$

Pierwszy warunek jest spełniony (równanie nie ma rozwiązań) dla: $k \in \{1\}$

2° Drugi warunek: $a \neq 0 \cap \Delta < 0$ $a \neq 0$ dla $k \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (8k - 8)^2 - 4(8(k^2 - 1))(1) \rightarrow z(k) = \Delta = 64k^2 - 128k + 64 - 32k^2 + 32$$

$$z(k) = 32k^2 - 128k + 96$$

$$z(k) = 0 \rightarrow 32k^2 - 128k + 96 < 0$$

$$k^2 - 4k + 3 < 0$$

Obliczamy Δ_z dla równania $z(k) = 0$: $\Delta_z = 16 - 4(1)(3) = 4$

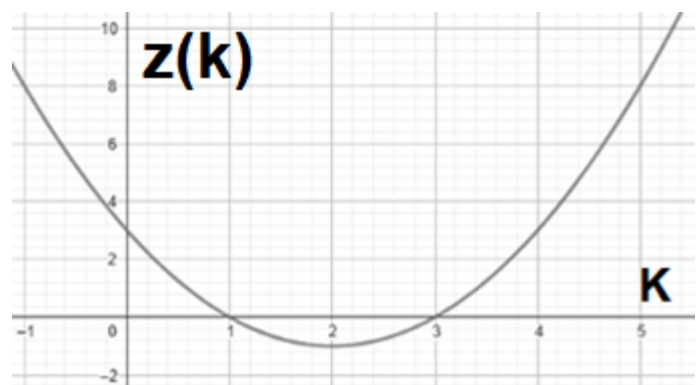
$\Delta_z > 0$, czyli równanie $z(k) = 0$ ma dwa pierwiastki.

$$k_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{oraz} \quad k_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$k_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad k_2 = 3$$

Wykres funkcji $z(k)$ ma postać.

Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(m)$ współczynnik $a > 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do góry. Parabola przecina oś K w punktach 1 oraz 3.



Zatem, wartość $z(k) < 0$ w przedziale $(1,3)$ co zapisujemy: $z(k) < 0$ dla $k \in (1, 3)$

Po tych rozważaniach wiemy, że wartość m musi spełniać obydwie warunki, to jest 1° oraz 2°.

$$k \in \{1\} \quad \text{lub} \quad k \in (1, 3) \cap k \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Część wspólna obu warunków, to: $k \in (1, 3)$

Zad. 3b 3.243b - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Wyznacz wszystkie wartości parametru k , $k \in \mathbb{R}$, dla których dane równanie:

$$(k - 3)x^2 + (k - 2)x + 1 = 0 \quad \text{ma tylko jedno rozwiązanie}$$

$$\text{Mamy: } a = k - 3, \quad b = k - 2, \quad c = 1$$

Aby to równanie miało tylko jedno rozwiązanie, to muszą być spełnione warunki:

$$a = 0 \cap b \neq 0 \quad \text{lub} \quad a \neq 0 \cap \Delta = 0 \quad - \text{ musi być spełniony jeden z tych warunków}$$

1°

$$a = 0$$

$$k - 3 = 0 \rightarrow k = 3$$

$$b \neq 0$$

$$k - 2 \neq 0 \rightarrow k \neq 2$$

Pierwszy warunek jest spełniony dla: $k \in \{3\}$

2° Drugi warunek: $a \neq 0 \cap \Delta = 0$ $a \neq 0$ dla $k \in \mathbb{R} - \{3\}$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (k - 2)^2 - 4(k - 3)(1) \rightarrow z(k) = \Delta = k^2 - 4k + 4 - 4k + 12$$

$$z(k) = k^2 - 8k + 16$$

$$z(k) = 0 \rightarrow k^2 - 8k + 16 = 0$$

$$k^2 - 8k + 16 = 0$$

Obliczamy Δ_z dla równania $z(k) = 0$: $\Delta_z = -64 - 4(1)(16) = 0$

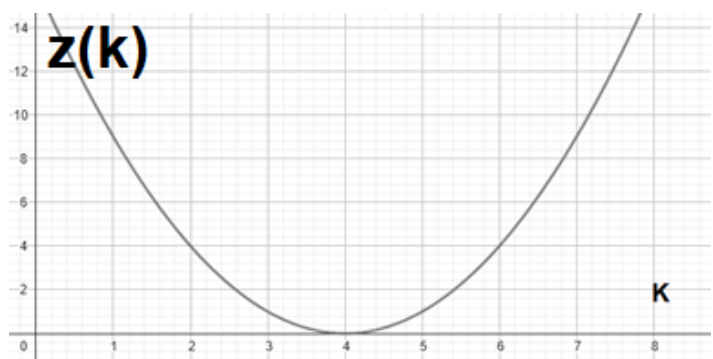
$\Delta_z = 0$, czyli równanie $z(k) = 0$ ma jeden pierwiastek.

$$k_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{oraz} \quad k_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad k_1 = k_2$$

$$k_1 = 4$$

Wykres funkcji $z(k)$ jest następujący.

Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(m)$ współczynnik $a > 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do góry. Parabola dotyka oś X w punkcie $k = 4$.



Zatem, wartość $z(k) = 0$ dla $k = 4$, co zapisujemy: $z(k) = 0$ dla $k \in \{4\}$

Po tych rozważaniach mamy wartości k spełniające warunki 1° oraz 2°:

$$k \in \{3\} \quad \text{lub} \quad k \in \{4\} \cap k \in \mathbb{R} - \{3\}$$

Równanie ma tylko jedno rozwiązanie, gdy: $k = 3 \vee k = 4$

Zad. 3c 3.243c - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Wyznacz wszystkie wartości parametru k , $k \in \mathbb{R}$, dla których dane równanie:

$$(k - 1)x^2 - (k + 1)x + k + 1 = 0 \quad \text{ma rozwiązanie}$$

Mamy: $a = k - 1$, $b = k + 1$, $c = k + 1$

Aby to równanie miało jedno albo dwa rozwiązania, to muszą być spełnione warunki:

$$a = 0 \cap b \neq 0 \quad \text{lub} \quad a \neq 0 \cap \Delta \geq 0 \quad - \text{ musi być spełniony jeden z tych warunków}$$

1° Warunek, by równanie miało tylko jedno rozwiązanie:

$$a = 0$$

$$k - 1 = 0 \rightarrow k = 1$$

$$b \neq 0$$

$$k + 1 \neq 0 \rightarrow k \neq -1$$

Pierwszy warunek jest spełniony dla: **$k \in \{1\}$**

2° Drugi warunek: $a \neq 0$ i $\Delta \geq 0$ $a \neq 0$ dla $k \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (k + 1)^2 - 4(k - 1)(k + 1) \quad z(k) = \Delta = k^2 + 2k + 1 - 4(k^2 + k - k - 1)$$

$$z(k) = -3k^2 + 2k + 5 \geq 0$$

Kiedy ten warunek jest spełniony?

Obliczamy Δ_z dla równania $z(k) = 0$: $\Delta_z = 4 + 60 = 64$

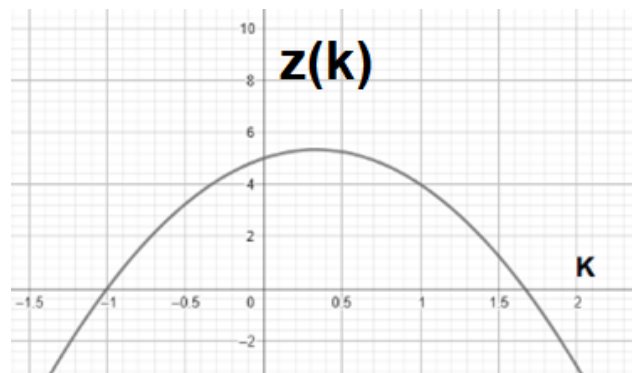
$\Delta_z > 0$, czyli równanie $z(k) = 0$ ma dwa pierwiastki.

$$k_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{oraz} \quad k_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$k_1 = (-2 - 8)/-6 = 1,66 \quad \text{oraz} \quad k_2 = (-2 + 8)/-6 = -1$$

Wykres funkcji $z(k)$ ma postać.

Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(k)$ współczynnik $a < 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do dołu. Parabola przecina oś K w punktach -1 oraz $1,66$.



Wniosek, mamy $z(k) = \Delta_k \geq 0$ w przedziale $\langle -1, 1,66 \rangle$

Zatem rozwiązaniem dla warunku $z(k) \geq 0$ jest **$k \in \langle -1, 1,66 \rangle$**

Po tych rozważaniach wiemy, że wartość k musi spełniać następujące warunki:

$$k \in \{1\} \quad \text{lub} \quad k \in \langle -1, 1,66 \rangle \cap k \in \mathbb{R} - \{1\}$$

Część wspólna obu warunków, to: **$k \in \langle -1, 1,66 \rangle$**

Zad. 3d 3.243d - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Wyznacz wszystkie wartości parametru k , $k \in \mathbb{R}$, dla których dane równanie:

$(k^2 - 3k + 2)x^2 + 3(k - 2)x + 4,5 = 0$ ma co najwyżej jedno rozwiązanie (ma jedno albo wcale).

Mamy: $a = k^2 - 3k + 2$, $b = 3(k - 2)$, $c = 4,5$

Aby to równanie miało tylko jedno rozwiązanie, to muszą być spełnione warunki:

$a = 0 \cap b \neq 0$ lub $a \neq 0 \cap \Delta \leq 0$ - musi być spełniony jeden z tych warunków

1° Warunek, by równanie miało tylko jedno rozwiązanie:

$a = 0$

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = 9 - 4(1)(2) = 1$$

$$k_1 = (3 - 1)/2 = 1 \quad k_2 = (3 + 1)/2 = 2$$

Pierwszy warunek jest spełniony dla: $k \in \{1\}$.

$b \neq 0$

$$3(k - 2) \neq 0 \rightarrow k - 2 \neq 0 \\ k \neq 2$$

2° Drugi warunek: $a \neq 0$ i $\Delta \leq 0$ $a \neq 0$ dla $k \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 9(k - 2)^2 - 4(k^2 - 3k + 2)(4,5) \quad z(k) = \Delta = 9k^2 - 36k + 36 - 18(k^2 - 3k + 2)$$

$$z(k) = -9k^2 + 18k \leq 0$$

Kiedy ten warunek jest spełniony?

Obliczamy Δ_z dla równania $z(k) = 0$: $\Delta_k = 324 - 0 = 324$

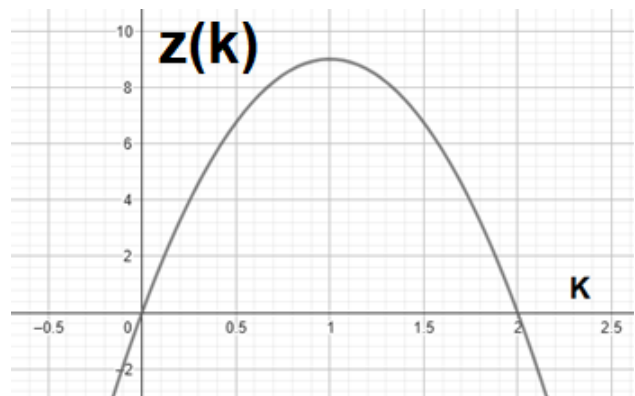
$\Delta_z > 0$, czyli równanie $z(k) = 0$ ma dwa pierwiastki.

$$k_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{oraz} \quad k_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$k_1 = (-18 - 18)/-18 = 2 \quad \text{oraz} \quad k_2 = (-18 + 18)/-18 = 0$$

Wykres funkcji $z(k)$ jest następujący.

Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(k)$ współczynnik $a < 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do dołu. Parabola przecina oś K w punktach 0 oraz 2.



Wniosek, mamy $z(k) = \Delta_k \leq 0$ w przedziałach: $(-\infty, 0]$ oraz $[2, +\infty)$

Zatem rozwiązaniem dla warunku: $z(k) \leq 0$ jest $k \in \{(-\infty, 0], [2, +\infty)\}$

Po tych rozważaniach wiemy, że wartość k musi spełniać następujące warunki:

$$k \in \{1\} \quad \text{lub} \quad k \in \{(-\infty, 0], [2, +\infty)\} \cap k \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

Część wspólna obu warunków, to: $k \in (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, +\infty)$

Zad. 4a 3.244a - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Wyznacz liczbę rozwiązań równania ze względu na wartość parametru p , $p \in \mathbb{R}$. Napisz wzór funkcji g , która każdej rzeczywistej wartości parametru p przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania. Naskicuj wykres funkcji $g(p)$.

$$(p - 5)x^2 - 4px + p - 2 = 0$$

Mamy: $a = p - 5$, $b = -4p$ $c = p - 2$.

Równanie kwadratowe może mieć jedno, dwa lub zero rozwiązań. Innymi słowy oczekujemy, że funkcja $g(p)$ może mieć następujące wartości: 0, 1, 2.

$g(p) = 1$

Aby to równanie miało tylko jedno rozwiązanie, to muszą być spełnione warunki:

$a = 0 \cap b \neq 0$ **lub** $a \neq 0 \cap \Delta = 0$ - musi być spełniony jeden z tych warunków

1° Pierwszy z tych warunków:

$$\begin{array}{ll} a = 0 & b \neq 0 \\ p - 5 = 0 & -4p \neq 0 \rightarrow p \neq 0 \\ & p \neq 0 \end{array}$$

Równanie ma jedno rozwiązanie gdy: $p \in \{5\}$.

2° Drugi warunek na to, by równanie miało jedno rozwiązanie.

$a \neq 0 \cap \Delta = 0$ $a \neq 0$ zawsze, gdy $p \neq 5$

Druga część warunku: $\Delta = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 16p^2 - 4(p - 5)(p - 2) = 16p^2 - 4(p^2 - 2p - 5p + 10) = 16p^2 - 4p^2 + 28p - 40$$

$$z(p) = \Delta = 12p^2 + 28p - 40$$

Szukamy dla jakich p funkcja $z(p) = 0$

Obliczamy Δ_z dla równania $z(p) = 0$: $\Delta_z = 784 + 1920 = 2704$ $\sqrt{2704} = 52$

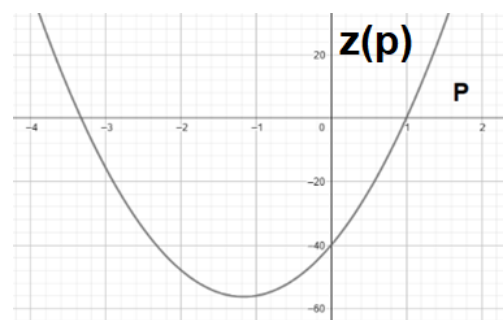
$\Delta_z > 0$ czyli funkcja $z(p)$ ma dwa miejsca zerowe

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{oraz} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_1 = (-28 - 52)/24 = -3,33 \quad z_2 = (-28 + 52)/24 = 1$$

Wykres funkcji $z(p)$ ma następującą formę.

Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(p)$ współczynnik $a > 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do góry. Parabola przecina oś P w punktach $-3,33$ oraz 1 .



Reasumując, równanie ma jedno rozwiązanie gdy $p = 5$ lub $p = -3,33$ albo $p = 1$

Można to zapisać jako: $g(p) = 1 \Leftrightarrow p \in \{-3,33, 1, 5\}$

$g(p) = 0$

Aby równanie $(p - 5)x^2 - 4px + p - 2 = 0$

nie miało rozwiązań, to muszą być spełnione warunki:

$a = 0 \cap b = 0$ **lub** $a \neq 0 \cap \Delta z < 0$ - musi być spełniony jeden z tych warunków

1° Wykazano wyżej, że gdy $a = 0$, to $b \neq 0$. **Zatem pierwszy warunek nigdy nie jest spełniony.**

2° Drugi warunek $a \neq 0 \cap \Delta z < 0$

Wykazano wyżej, że $a \neq 0$ gdy $p \neq 5$

Kiedy mamy przypadek, gdy: $\Delta z < 0$, czyli $z(p) < 0$?

Wykazano wyżej na wykresie $z(p)$, że zachodzi to dla wartości p z przedziału $(-3,33, 1)$.

Zatem: $g(p) = 0 \Leftrightarrow p \in (-3,33, 1)$

 $g(p) = 2$

Aby równanie $(p - 5)x^2 - 4px + p - 2 = 0$ miało dwa rozwiązania, to muszą być spełnione warunki:

$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ muszą być spełnione łącznie oba te warunki $a \neq 0 \cap \Delta > 0$

Wykazano wyżej, że $a \neq 0$ gdy $p \neq 5$

1° Pierwszy warunek jest spełniony dla: **$m \in \mathbb{R} - \{-2\}$**

2° Drugi warunek: $\Delta > 0$

Kiedy mamy przypadek, gdy: $\Delta > 0$, czyli $z(p) > 0$?

Wykazano wyżej na wykresie $z(p)$, że zachodzi to dla wartości p z przedziałów $(-\infty, -3,33)$ oraz $(1, +\infty)$. Wniosek: $g(p) = 2 \Leftrightarrow p \in (-\infty, -3,33)$ **lub** $(1, 5)$ **lub** $(5, +\infty)$.

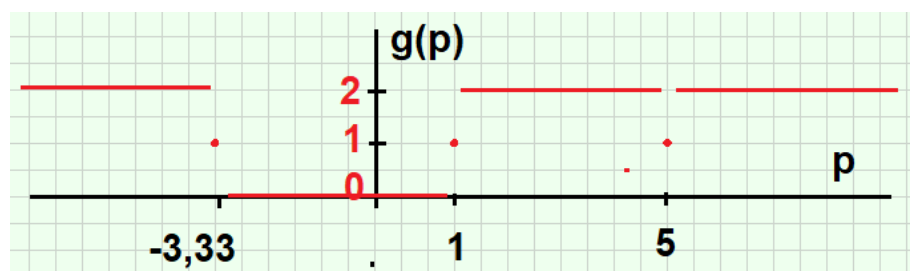
Reasumując:

$g(p) = 2 \Leftrightarrow p \in (-\infty, -3,33)$ **lub** $(1, 5)$ **lub** $(5, +\infty)$

$g(p) = 0 \Leftrightarrow p \in (-3,33, 1)$

$g(p) = 1 \Leftrightarrow p \in \{-3,33, 1, 5\}$

Wykresem funkcji $g(p)$



Spójrz również do: <https://odrabiamy.pl/matematyka/ksiazka-12640/strona-112/zadanie-884207>

Zad. 5a 3.245a - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

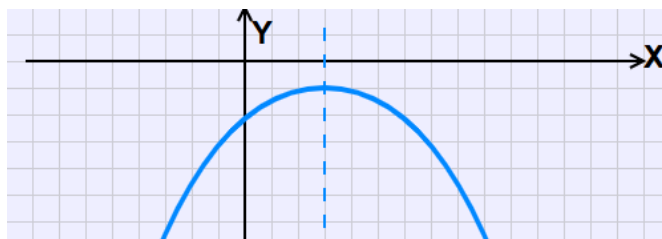
Wyznacz wszystkie wartości parametru m , $m \in \mathbb{R}$, dla których dana nierówność jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x .

$$-x^2 + (m + 2)x + 8m - 1 < 0$$

$$m = ? \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$a = -1, \quad b = m + 2, \quad c = 8m - 1$$

Rozpatrzmy funkcję $y(x) = -x^2 + (m + 2)x + 8m - 1$. Wykresem jej jest parabola. Gdy $a = -1$, to jest to parabola o ramionach skierowanych do dołu. Nierówność będzie spełniona gdy wierzchołek tej paraboli będzie poniżej osi X .



Spełnione to będzie, gdy wyróżnik równania Δ będzie ujemny.

$$\Delta < 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (m + 2)^2 - 4(-1)(8m - 1) = (m^2 + 4m + 4) + 32m - 4 = m^2 + 36m$$

Wyróżnik jest funkcją kwadratową $z(m) = \Delta = m^2 + 36m$

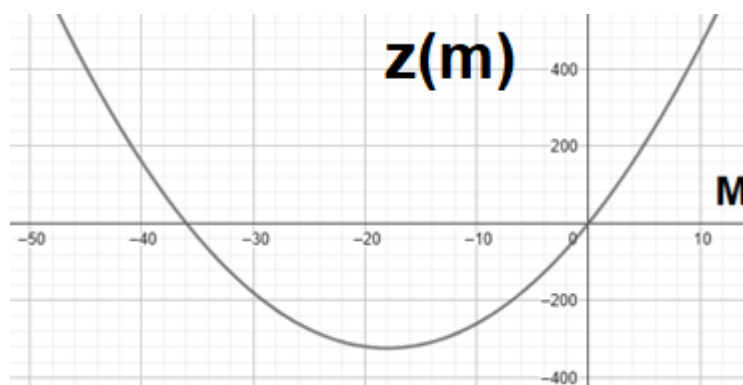
Chcemy określić kiedy $z(m) = m^2 + 36m < 0$

$$\Delta_z = b^2 - 4ac = 1296 - 0 = 1296 \quad \sqrt{1296} = 36$$

$$m_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = (-36 - 36)/2 = 0 \quad m_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = (-36 + 36)/2 = -36$$

Wykres funkcji $z(m)$ ma następującą formę.

Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(m)$ współczynnik $a > 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do góry. Parabola przecina oś M w punktach -36 oraz 0 .



$$z(m) < 0 \Leftrightarrow m \in (-36, 0)$$

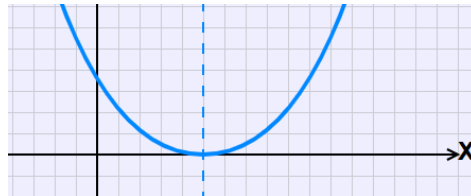
Zad. 5b 3.245b - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , $m \in \mathbb{R}$, dla których dana nierówność jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x .

$$2x^2 + (3 + m)x + 2 \geq 0$$

$$a = 2, b = 3 + m, c = 2$$

Rozpatrzmy funkcję $y(x) = 2x^2 + (3 + m)x + 2$. Wykresem jej jest parabola. Gdy $a > 0$, to ramiona tej paraboli są skierowane do góry. Wartości tej funkcji będą większe lub równe zero, jeśli wierzchołek paraboli będzie nad osią X , lub ją dotykał w jednym miejscu.



Spełnione to będzie, gdy wyróżnik równania Δ będzie spełniał nierówność $\Delta \leq 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3 + m)^2 - 4(2)(2) = (9 + 6m + m^2) - 16 = m^2 + 6m - 7$$

Wyróżnik jest funkcją kwadratową $z(m) = \Delta = m^2 + 6m - 7$

Chcemy określić kiedy $z(m) = m^2 + 6m - 7 \leq 0$

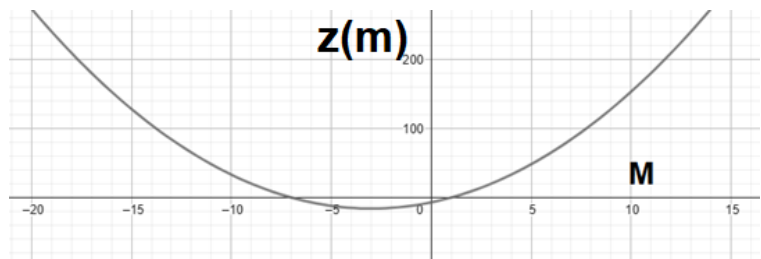
$$\Delta_z = b^2 - 4ac = 36 + 28 = 64 \quad \sqrt{64} = 8$$

$$m_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 8}{2} = -7$$

$$m_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 8}{2} = 1$$

Wykres funkcji $z(m)$ ma formę.

Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(m)$ współczynnik $a > 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do góry. Parabola przecina oś M w punktach -7 oraz 1 .



$$z(m) \leq 0 \Leftrightarrow m \in \langle -7, 1 \rangle$$

Zad. 6a 3.246a - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Wyznacz wszystkie wartości parametru k , $k \in \mathbb{R}$, dla których dziedziną funkcji f jest zbiór \mathbb{R} jeśli:

$$f(x) = \sqrt{kx^2 + 4kx + k - 3} \quad \mathbb{R} - \text{zbiór liczb rzeczywistych}$$

Wiemy, że liczba pod $\sqrt{\quad}$ musi być liczbą dodatnią, czyli większą lub równą zero. Stąd możemy zapisać:

$$y(x) = kx^2 + 4kx + k - 3 \geq 0$$

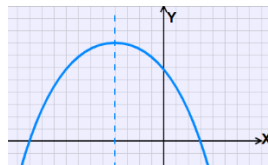
$a = k$, $b = 4k$, $c = k - 3$, $\Delta y = b^2 - 4ac$ to wyróżnik równania $kx^2 + 4kx + k - 3 = 0$

Ogólnie współczynnik a może przybierać wartości dodatnie, ujemne albo zero.

Gdy $a = 0$, to mamy: $k = 0 \rightarrow y(x) = -3$

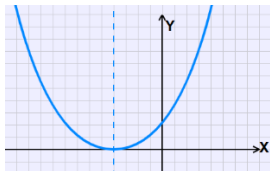
Pamiętamy, że chcemy by: $y(x) \geq 0$. Zatem dla $a = 0$ jest to niemożliwe.

Gdyby $a < 0$, to wykres funkcji $y(x)$ byłby parabolą o ramionach skierowanych do dołu.



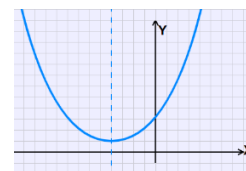
Mogą istnieć wartości x , dla których $y(x) \geq 0$, ale w zadaniu jest powiedziane, że dziedziną funkcji $f(x)$ jest **cały** zbiór \mathbb{R} . Zatem nie będziemy rozpatrywać przypadków: $a < 0$ oraz $a = 0$.

Rozpatrzmy przypadek gdy $a > 0$. Wykresem funkcji $y(x)$ jest parabola o ramionach skierowanych do góry. Z warunków zadania, interesują nas następujące przypadki:



$a > 0$ i $\Delta = 0$

oraz $a > 0$ i $\Delta < 0$



Zatem dla $a > 0 \cap \Delta \leq 0$ może być spełniony warunek, że $y(x) \geq 0$ dla każdego x ze zbioru \mathbb{R} .

Szukamy zatem wartości k spełniających łącznie dwa warunki: $a > 0 \cap \Delta \leq 0$

1° $a > 0$

$a > 0 \Leftrightarrow k > 0$ - to nasz pierwszy warunek jaki muszą spełniać wartości parametru k .

2° $\Delta \leq 0$

Wyróżnik równania $kx^2 + 4kx + k - 3 = 0$ to $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta_y = 16k^2 - 4k(k - 3) = 16k^2 - 4k^2 + 12k = 12k^2 + 12k$$

Otrzymaliśmy wartość wyróżnika Δ_y , która jest funkcją kwadratową $z(k)$ parametru k .

$$z(k) = 12k^2 + 12k \quad \text{gdzie: } z(k) = \Delta_y \leq 0$$

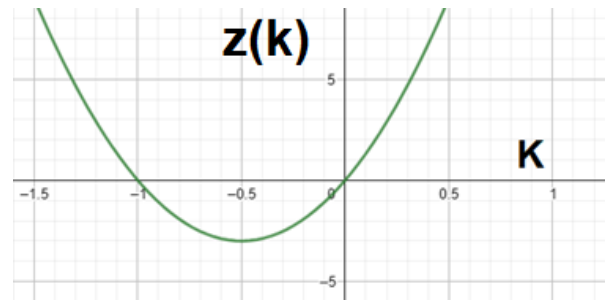
Obliczmy wyróżnik dla równania kwadratowego $12k^2 + 12k = 0$

$$\Delta_z = 12^2 = 144, \quad \sqrt{144} = 12$$

Pierwiastkami równania są: $k_1 = (-12 - 12)/24 = -1$ oraz $k_2 = (-12 + 12)/24 = 0$

Pozwala nam to sporządzić wykres funkcji $z(k)$.

Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(k)$ współczynnik $a > 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do góry. Parabola przecina oś K w punktach -1 oraz 0 .



Zatem $z(k) \leq 0$ w przedziale $k \in \langle -1, 0 \rangle$ - to nasz drugi warunek jaki muszą spełniać wartości parametru k .

Należy pamiętać, że $y(x) \geq 0$ muszą być spełnione łącznie dwa znalezione warunki, czyli 1° oraz 2° jednocześnie:

$$k > 0 \quad \cap \quad k \in \langle -1, 0 \rangle$$

Znalezione przedziały wartości k nie pokrywają się, nie mają części wspólnych.

Jak widać nie istnieje żadna wartość parametru k , dla której dziedziną podanej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych \mathbb{R} .

Zad. 6b 3.246b - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Wyznacz wszystkie wartości parametru k , $k \in \mathbb{R}$, dla których dziedziną funkcji f jest zbiór \mathbb{R} jeśli:

$$f(x) = \sqrt{(k^2 + k - 6)x^2 + (k - 2)x + 1} \quad \mathbb{R} - \text{zbiór liczb rzeczywistych}$$

Wiemy, że liczba pod $\sqrt{\quad}$ musi być liczbą dodatnią, czyli większą lub równa zero. Stąd możemy zapisać:

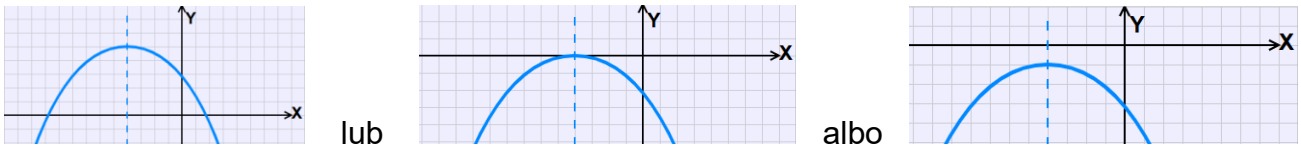
$$y(x) = (k^2 + k - 6)x^2 + (k - 2)x + 1 \geq 0$$

$$a = k^2 + k - 6, \quad b = k - 2, \quad c = 1,$$

$$\Delta_y = b^2 - 4ac \text{ to wyróżnik równania } (k^2 + k - 6)x^2 + (k - 2)x + 1 = 0$$

Ogólnie współczynnik a może przybierać wartości dodatnie, ujemne albo zero.

- Gdyby $a < 0$, to wykres funkcji $y(x)$ miałby postać:



W każdym z tych przypadków nie spełnione jest żądanie by dziedziną funkcji $f(x)$ był **cały** zbiór liczb rzeczywistych \mathbb{R} . Zatem odrzucamy przypadek $a < 0$.

- Rozpatrzmy przypadek $a = 0$

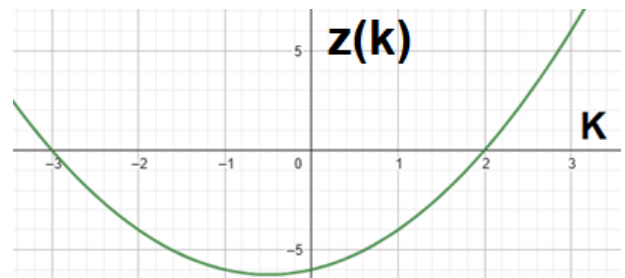
$$a = k^2 + k - 6. \text{ Widzimy, że } a \text{ jest funkcją } k. \text{ Mamy } a(k) = k^2 + k - 6.$$

Obliczmy wyróżnik Δ_a dla równania kwadratowego $k^2 + k - 6 = 0$ oraz jego pierwiastki.

$$\Delta_a = 1^2 - 4(1)(-6) = 25, \quad \sqrt{25} = 5 \quad a_1 = (-1 - 5)/2 = -3 \quad a_2 = (-1 + 5)/2 = 2$$

Pozwala nam to sporządzić wykres funkcji $a(k)$. Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $a(k)$ współczynnik $a > 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do góry. Parabola przecina oś K w punktach -3 oraz 2 .

Miejsca zerowe $a(k)$ to punkty $k_1 = -3$ i $k_2 = 2$



Funkcja $y(x) = (k^2 + k - 6)x^2 + (k - 2)x + 1$ dla tych punktów miałaby postać: $y(x) = (k - 2)x + 1$

$$y(x) = (k - 2)x + 1 \text{ dla } k = -3 \text{ to: } y_1(x) = (-3 - 2)x + 1 \rightarrow y_1(x) = -5x + 1$$

Zatem $y_1(x) \geq 0$ gdy $-5x + 1 \geq 0 \rightarrow x \leq 0,2$ - wartości x nie są z całego zakresu \mathbb{R} .

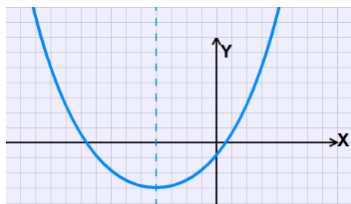
$$y(x) = (k - 2)x + 1 \text{ dla } k = 2 \text{ to: } y_2(x) = (2 - 2)x + 1 \rightarrow y_2(x) = 1$$

Dla $k = 2$ wartości $y(x)$ nie są funkcją x .

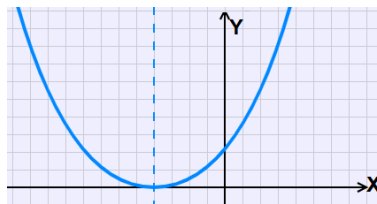
Odrzucamy więc i przypadek $a = 0$, jako nie spełniający warunków zadania.

- Rozpatrzmy przypadek $a > 0$

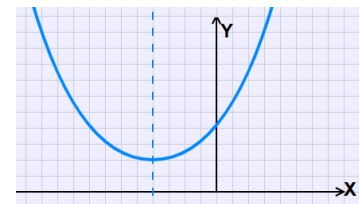
Wykres funkcji $y(x)$ może mieć dla $a > 0$ jedną z następujących postaci:



$$a > 0 \cap \Delta > 0$$



$$a > 0 \cap \Delta = 0$$



$$a > 0 \cap \Delta < 0$$

Aby spełnić warunek zadania, że $y(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to muszą być spełnione łącznie warunki: $a > 0 \cap \Delta_y \leq 0$.

Zbadajmy przypadek: $a > 0 \cap \Delta_y \leq 0$

1° $a > 0$ - Badaliśmy już powyżej funkcję $a(k)$. Widać z wykresu $a(k)$, że $a(k) > 0$ dla przedziałów wartości k $(-\infty, -3)$ lub $(2, +\infty)$. $k \in (-\infty, -3) \vee (2, +\infty)$.

2° $\Delta_y \leq 0$ - Zbadajmy dla jakich wartości k jest spełniona ta nierówność.

Obliczmy wyróżnik Δ_y równania $(k^2 + k - 6)x^2 + (k - 2)x + 1 = 0$

$$\Delta_y = (k - 2)^2 - 4(k^2 + k - 6) = k^2 - 4k + 4 - 4k^2 - 4k + 24 = -3k^2 - 8k + 28$$

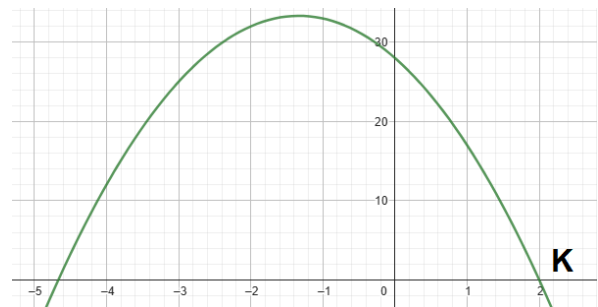
Widać, że wyróżnik Δ_y jest funkcją kwadratową parametru k .

$$z(k) = \Delta_y = -3k^2 - 8k + 28$$

Aby sporządzić wykres funkcji $z(k)$ znajdziemy miejsca zerowe tej funkcji.

$$\Delta_z = 64 - 4(3)(28) = 400, \quad \sqrt{400} = 20, \quad k_1 = (8 - 20)/-6 = 2 \quad k_2 = (8 + 20)/-6 = -4,66$$

Pozwala nam to sporządzić wykres funkcji $z(k)$. Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(k)$ współczynnik $a < 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do dołu. Parabola przecina oś K w punktach $-4,66$ oraz 2 .



Zatem $z(k) = \Delta_y \leq 0$ dla $k \in (-\infty, -4,66) \vee (2, +\infty)$

Pamiętamy, że muszą być spełnione łącznie oba warunki, 1° oraz 2°, czyli $a > 0 \cap \Delta_y \leq 0$

Zatem możemy zapisać:

$$k \in ((-\infty, -3) \vee (2, +\infty)) \cap ((-\infty, -4,66) \vee (2, +\infty))$$

Wspólną częścią tych przedziałów jest:

$$k \in (-\infty, -4,66) \vee (2, +\infty)$$

Zad. 9 9 strona 172 - „Podręcznik do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Wyznacz wszystkie wartości parametru p , $p \in \mathbb{R}$, dla których funkcja kwadratowa

$$y(x) = x^2 - 2(1-p)x + 1$$

ma dwa miejsca zerowe należące do przedziału $(-2, 1)$.

$$a = 1, \quad b = -2(1-p) = 2p - 2, \quad c = 1, \quad p ?$$

Warunki na to aby funkcja $y(x)$ miała dwa miejsca zerowe są następujące:

$$a > 0 \cap \Delta > 0$$

1° Pierwszy warunek jest spełniony dla dowolnej wartości p , bowiem $a = 1 \rightarrow p \in \mathbb{R}$

2° Drugi warunek, to: $\Delta > 0$

$$\Delta_y = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta_y = (2p - 2)^2 - 4(1)(1) = 4p^2 + 8p + 4 - 4 \rightarrow \Delta_y = 4p^2 - 8$$

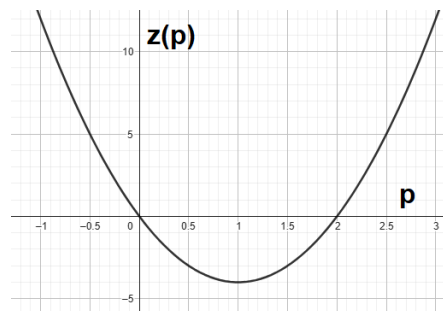
$$\Delta_y = 4p(p - 2) = 4(p - 0)(p - 2)$$

$$z(p) = \Delta_y = 4(p - 0)(p - 2) > 0$$

Mamy funkcję $z(p)$ w postaci iloczynowej. Widać, że jej miejscami zerowymi są wartości:

$$p_1 = 0 \text{ oraz } p_2 = 2 \text{ a współczynnik } a = 4.$$

Wykres funkcji $z(p)$ ma następującą postać.



Zatem $z(p) < 0$ dla $p \in (-\infty, 0) \vee (2, +\infty)$

Zapiszmy łącznie $a > 0 \cap \Delta > 0 \quad p \in \mathbb{R} \cap p \in (-\infty, 0) \vee (2, +\infty)$

Część wspólna tych przedziałów, to: $p \in (-\infty, 0) \vee (2, +\infty)$

3° W zadaniu narzucono warunek dodatkowy warunek na wartość p , a mianowicie miejsca zerowe funkcji $y(x)$ mają być z przedziału wartości $x \in (-2, 1)$.

$$\text{Czyli: } -2 < x_1 < 1 \cap -2 < x_2 < 1$$

Można to rozpisać następująco:

$$x_1 > -2 \cap x_1 < 1 \text{ i jednocześnie}$$

$$x_2 > -2 \cap x_2 < 1$$

$$x_1 - 2 > 0 \quad x_2 - 2 > 0 \rightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \rightarrow x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 > 0$$

$$x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$$

Możemy wykorzystać wzory Viete'a $x_1 \cdot x_2 = c/a$ oraz $x_1 + x_2 = -b/a$.

$$1 - 2(2p - 2) + 4 > 0 \rightarrow 1 - 4p + 4 + 4 > 0 \rightarrow -4p > -9 \rightarrow p < 9/4 \rightarrow p < 2,25$$

Analogicznie możemy zapisać, że:

$$x_1 < 1 \quad x_2 < 1$$

$$x_1 - 1 < 0 \quad x_2 - 1 < 0 \quad \rightarrow \quad (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \quad \rightarrow \quad x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1 > 0$$

$$x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0$$

Możemy wykorzystać wzory Viete'a $x_1 \cdot x_2 = c/a$ oraz $x_1 + x_2 = -b/a$.

$$1 + (2p - 2) + 1 > 0 \quad \rightarrow \quad 1 + 2p - 2 + 1 > 0 \quad \rightarrow \quad 2p > 0 \quad \rightarrow \quad p > 0$$

Z warunku w zadaniu o miejscach zerowych funkcji $y(x)$ wynika:

$$p < 2,25 \quad \cap \quad p > 0. \quad \text{Zatem: } p \in (0, 2,25)$$

Łącznie mamy następujące warunki jakie muszą spełniać wartości p :

$$p \in (-\infty, 0) \quad \vee \quad (2, +\infty) \quad \cap \quad p \in (0, 2,25)$$

Część wspólna tych przedziałów, to:

$$p \in (2, 2,25)$$

Zad. 10

Wyznacz wszystkie wartości parametru k , $k \in \mathbb{R}$, dla których dziedziną funkcji f jest zbiór \mathbb{R} jeśli:

$$f(x) = \sqrt{(k+1)x^2 + 4x + k+1} \quad \mathbb{R} - \text{zbiór liczb rzeczywistych}$$

Wiemy, że liczba pod $\sqrt{\quad}$ musi być liczbą dodatnią, czyli większą lub równą zero. Stąd możemy zapisać:

$$y(x) = (k+1)x^2 + 4x + k+1 \geq 0$$

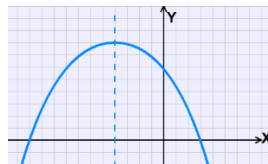
$a = k+1$, $b = 4$, $c = k+1$, $\Delta_y = b^2 - 4ac$ to wyróżnik równania $(k+1)x^2 + 4x + k+1 = 0$

Ogólnie współczynnik a może przybierać wartości dodatnie, ujemne albo zero.

Gdy $a = 0$, to mamy: $k+1 = 0 \rightarrow k = -1 \rightarrow y(x) = 4x$

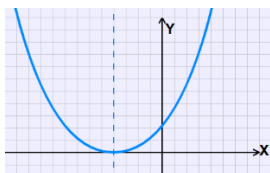
Pamiętamy, że chcemy by: $y(x) \geq 0$ dla całego zbioru \mathbb{R} . Tymczasem $y(x)$ dla ujemnych wartości x ma wartości ujemne. Zatem dla $a = 0$ niemożliwe jest spełnienie warunku zadania.

Gdyby $a < 0$, to wykres funkcji $y(x)$ byłby parabolą o ramionach skierowanych do dołu.



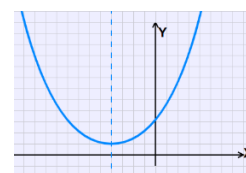
Mogą istnieć wartości x , dla których $y(x) \geq 0$, ale w zadaniu jest powiedziane, że dziedziną funkcji $f(x)$ jest **cały** zbiór \mathbb{R} . Zatem nie będziemy rozpatrywać przypadków: $a < 0$ oraz $a = 0$.

Rozpatrzmy przypadek gdy $a > 0$. Wykresem funkcji $y(x)$ jest parabola o ramionach skierowanych do góry. Z warunków zadania, interesują nas następujące przypadki:



$a > 0$ i $\Delta = 0$

oraz $a > 0$ i $\Delta < 0$



Zatem dla $a > 0 \cap \Delta \leq 0$ może być spełniony warunek, że $y(x) \geq 0$ dla każdego x ze zbioru \mathbb{R} .

Szukamy zatem wartości k spełniających łącznie dwa warunki: $a > 0 \cap \Delta \leq 0$

1° $a > 0$

$a > 0 \Leftrightarrow k+1 > 0 \rightarrow \mathbf{k > -1}$ - to jest nasz pierwszy warunek jaki muszą spełniać wartości parametru k .

2o $\Delta \leq 0$

Wyróżnik równania $(k+1)x^2 + 4x + k+1 = 0$ to $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta_y = 4^2 - 4(k+1)(k+1) = 16 - 4(k^2 + 2k + 1) = 16 - 4k^2 - 8k - 4 = -4k^2 - 8k + 12$$

Otrzymaliśmy wartość wyróżnika Δ_y , która jest funkcją kwadratową $z(k)$ parametru k .

$$z(k) = -4k^2 - 8k + 12 \quad \text{gdzie: } z(k) = \Delta_y \leq 0$$

Obliczmy wyróżnik dla równania kwadratowego $-4k^2 - 8k + 12 = 0$

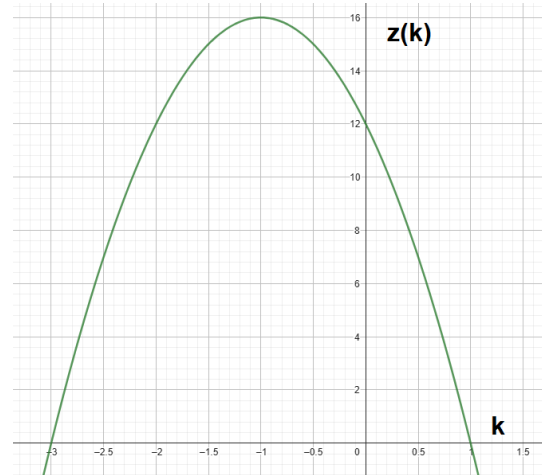
$$\Delta_z = 8^2 - 4(-4)12 = 64 + 192 = 256, \quad \sqrt{256} = 16$$

Pierwiastkami równania są: $k_1 = (8 - 16)/-8 = 1$ oraz $k_2 = (8 + 16)/-8 = -3$

Pozwala nam to sporządzić wykres funkcji $z(k)$.

Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(k)$ współczynnik $a < 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do dołu. Parabola przecina oś K w punktach -3 oraz 1 .

Zatem $z(k) \leq 0$ w przedziale $k \in (-\infty, -3) \vee (1, +\infty)$ to nasz drugi warunek jaki muszą spełniać wartości parametru k .



Należy pamiętać, że aby zachodziło $y(x) \geq 0$, to muszą być spełnione łącznie dwa znalezione warunki, czyli 1° oraz 2° jednocześnie:

$$k > -1 \quad \cap \quad k \in \{(-\infty, -3) \vee (1, +\infty)\}$$

Częścią wspólną tych przedziałów jest: $k \in \{(-1, -3) \vee (1, +\infty)\}$

Zad. 11

Wyznacz wszystkie wartości parametru k , $k \in \mathbb{R}$, dla których poniższe różne rozwiązania poniższego równania spełniają warunek $|x_1 - x_2| = \sqrt{5}$.

$$x^2 + (k + 1)x + k + 3 = 0$$

$$a = 1, \quad b = k + 1, \quad c = k + 3$$

Równanie to może mieć dwa rozwiązania dla $a > 0$, co jest tu spełnione.

Aby były dwa różne rozwiązania równania kwadratowego musi być jego wyróżnik większy od zera.

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \quad \rightarrow \quad (k + 1)^2 - 4(1)(k + 3) > 0 \quad \rightarrow \quad k^2 + 2k + 1 - 4k - 12 > 0$$

$$k^2 - 2k - 11 > 0 \quad \text{Wyróżnik jest funkcją kwadratową } z(k) \text{ parametru } k.$$

Badamy kiedy wartości tej funkcji są większe od zera. $z(k) > 0$

Szukamy miejsc zerowych funkcji $z(k)$: $k^2 - 2k - 11 = 0$

$$\Delta_z = 1 - 4(1)(-11) = 45 \quad \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$$

$$k_1 = (2 - 3\sqrt{5})/2 \approx -2,46 \quad k_2 = (2 + 3\sqrt{5})/2 \approx 4,46 \quad (\text{Nie trzeba wyliczać tych wartości})$$

Uzyskane wyniki pozwalają sporządzić wykres funkcji $z(k)$.

Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(k)$ współczynnik $a > 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do góry. Parabola przecina oś K w punktach $(2 - 3\sqrt{5})/2$ oraz $(2 + 3\sqrt{5})/2$.

Zatem $z(k) > 0$ w przedziałach:

$$k \in (-\infty, (2 - 3\sqrt{5})/2) \cup ((2 + 3\sqrt{5})/2, +\infty)$$

$$k \in (-\infty, -2,35) \cup (4,35, +\infty)$$

W zadaniu mamy dodatkowy warunek, a mianowicie, że $|x_1 - x_2| = \sqrt{5}$.

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{5} \quad \rightarrow \quad |x_1 - x_2|^2 = 5 \quad \rightarrow \quad (x_1 - x_2)^2 = 5 \quad \rightarrow \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 5$$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 5 \quad \rightarrow \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_2 = 5$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = 5 \quad \rightarrow \quad (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 5$$

Po takim przekształceniu możemy wykorzystać wzory Viete'a $x_1 \cdot x_2 = c/a$ oraz $x_1 + x_2 = -b/a$.

$$(-b/a)^2 - 4c/a = 5 \quad \rightarrow \quad (k + 1)^2 - 4(1)(k + 3) = 5 \quad \rightarrow \quad k^2 + 2k + 1 - 4k - 12 = 5$$

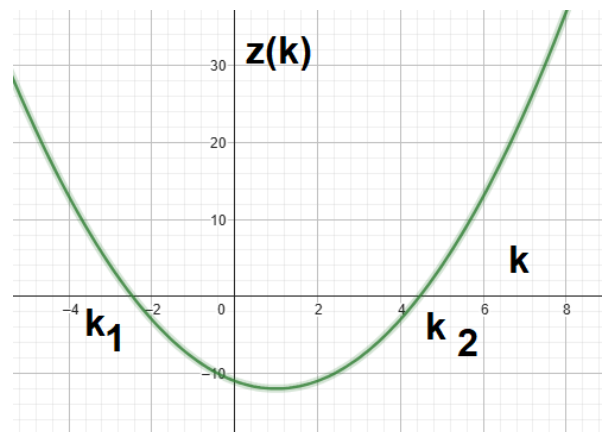
$$k^2 - 2k - 16 = 0 \quad \Delta = 4 + 64 = 68 \quad \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$k_1 = (2 - 2\sqrt{17})/2 = 1 - \sqrt{17} \quad k_2 = (2 + 2\sqrt{17})/2 = 1 + \sqrt{17}$$

$$k \in \{1 - \sqrt{17}, 1 + \sqrt{17}\} \quad k \in \{-3, 12, 5, 12\}$$

Wyznaczone wartości parametru k_1 i k_2 mieszczą się w znalezionym wyżej przedziale.

Zatem ostatecznie: $k \in \{1 - \sqrt{17}, 1 + \sqrt{17}\}$



Zad. 12

Wyznacz wszystkie wartości parametru k , $k \in \mathbb{R}$, dla których poniższe równanie ma dwa rozwiązania dodatnie.

$$x^2 - (2k - 4)x + k^2 - 2k - 3 = 0$$

$a = 1$, $b = -(2k - 4)$, $c = k^2 - 2k - 3 \rightarrow a > 0$, czyli mamy równanie kwadratowe.

1° Aby to równanie miało dwa rozwiązania, to jego wyróżnik Δ musi spełniać nierówność: $\Delta > 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (4 - 2k)^2 - 4(k^2 - 2k - 3) = 16 - 16k + 4k^2 - 4k^2 + 8k + 12$$

$$\Delta = -8k + 28 > 0 \rightarrow -8k > -28 \rightarrow \mathbf{k < 3,5}$$

2° Obydwa pierwiastki są dodatnie jeżeli ich suma i iloczyn są dodatnie.

$$x_1 \cdot x_2 > 0 \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 > 0$$

Zatem z wzorów Viète'a wynika, że: $-b/a > 0 \quad \cap \quad c/a > 0$

$$-b/a = (2k - 4)/1 = 2k - 4 \quad 2k - 4 > 0 \rightarrow 2k > 4 \rightarrow \mathbf{k > 2}$$

$c/a = k^2 - 2k - 3 > 0$ Jak widać iloraz c/a jest funkcją kwadratową $z(k)$ parametru k .

Mamy funkcję $z(k) = k^2 - 2k - 3$

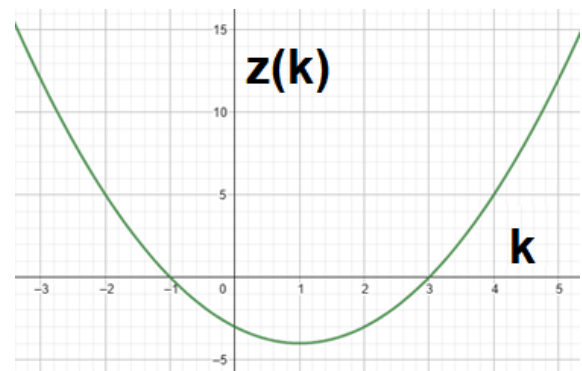
Należy zbadać kiedy $z(k) > 0$.

$$\Delta_z = b^2 - 4ac = 4 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16 \quad \sqrt{\Delta_z} = 4$$

$$k_1 = (-b - \sqrt{\Delta_z})/2a = (2 - 4)/2 = -1 \quad k_2 = (-b + \sqrt{\Delta_z})/2a = (2 + 4)/2 = 3$$

Wykresem funkcji $z(k)$ jest parabola.

Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(k)$ współczynnik $a > 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do góry. Parabola przecina oś K w punktach -1 oraz 3 .



Zatem $z(k) > 0$ dla: $\mathbf{k \in (-\infty, -1) \vee (3, +\infty)}$

Mamy następujące warunki na to aby obydwa pierwiastki równania były dodatnie

$$k > 2 \quad \cap \quad k \in (-\infty, -1) \vee (3, +\infty)$$

co prowadzi do warunku: $\mathbf{k \in (3, +\infty)}$

Mamy zatem następujące warunki na k wynikające z rozważań 1° oraz 2°.

$$k < 3,5 \quad \cap \quad k \in (3, +\infty)$$

Zatem ostatecznie: $\mathbf{k \in (3, 3,5)}$

Zad. 13

Wyznacz wszystkie wartości parametru k , $k \in \mathbb{R}$, dla których poniższe równanie ma dwa rozwiązania dodatnie.

$$kx^2 + (k - 3)x + 2 - k = 0$$

$$a = k, \quad b = k - 3, \quad c = 2 - k$$

Dla $a = 0$, czyli $k = 0$ mielibyśmy równanie liniowe, a takie nie ma dwu rozwiązań. Stąd: $k \neq 0$.

1° Aby równanie kwadratowe miało dwa rozwiązania, to musi być $k \neq 0$ i wyróżnik równania Δ musi spełniać nierówność: $\Delta > 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (k - 3)^2 - 4(k)(2 - k) = k^2 - 6k + 9 - 4(2k - k^2) = k^2 - 6k + 9 + 4k^2 - 8k$$

$$\Delta = 5k^2 - 14k + 9 > 0$$

Wyróżnik Δ okazał się funkcją kwadratową $z(k)$ parametru k . $z(k) = 5k^2 - 14k + 9$.

Wymagane jest aby $z(k) > 0$. Przeanalizujemy przebieg funkcji $z(k)$.

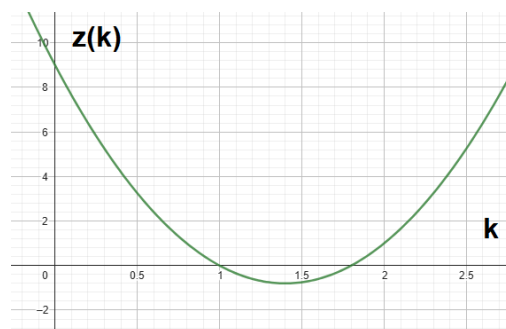
$$\Delta_z = 14^2 - 4(5)(9) = 196 - 180 = 16 \quad \sqrt{\Delta} = 4$$

$$k_1 = (-b - \sqrt{\Delta_z})/2a = (14 - 4)/10 = 1 \quad k_2 = (-b + \sqrt{\Delta_z})/2a = (14 + 4)/10 = 18/10 = 1,8$$

Wykresem $z(k)$ jest parabola.

Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(k)$ współczynnik $a > 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do góry. Parabola przecina oś K w punktach 1 oraz 1,8.

Zatem $z(k) > 0$ dla: $k \in (-\infty, 1) \cup (1,8, +\infty)$



2° Obydwa pierwiastki są dodatnie jeżeli ich suma i iloczyn są dodatnie.

$$x_1 \cdot x_2 > 0 \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 > 0$$

Zatem z wzorów Viète'a wynika, że: $-b/a > 0 \quad \cap \quad c/a > 0$

$$-b/a = -(k - 3)/k = (3 - k)/k > 0$$

$$\text{Gdy } k > 0, \text{ to możemy zapisać } 3 - k > 0 \rightarrow k < 3 \rightarrow k \in (0, 3)$$

Gdy $k < 0$, to mamy: $3 - k < 0$ i wtedy $k > 3$, czyli dochodzimy do sprzeczności

$$c/a = (2 - k)/k > 0 \quad \text{Analogicznie mamy, że: } k \in (0, 2)$$

Obydwa pierwiastki są dodatnie gdy $k \in (0, 2)$

Znajdźmy wspólną część przedziałów wartości z rozważań 1° i 2°.

$$(k \in (-\infty, 1) \cup (1,8, +\infty)) \cap k \in (0, 2)$$

$$k \in (0, 1) \cup (1,8, 2)$$

Zad. 15 patrz <https://zadania.info/d590/1>

Poniżej, dane jest równanie z niewiadomą x . Sporządź wykres funkcji $f(k)$, gdzie $f(k)$ oznacza liczbę rzeczywistych pierwiastków danego równania.

$$(k - 1)x^2 + \sqrt{7} kx + k + 1 = 0$$

$a = k - 1$, $b = k\sqrt{7}$, $c = k + 1$ $f(k) = ?$ obrazuje liczbę rozwiązań w zależności od k .

1° Rozważmy przypadek $a = 0$. $a = 0 \rightarrow k - 1 = 0 \rightarrow k = 1$.

Wtedy równanie przyjmie postać: $0 + \sqrt{7} x + 1 + 1 = 0 \rightarrow \sqrt{7} x + 2 = 0$

Mamy zatem **jedno rozwiązanie** równania dla: **$k = 1$** .

2° Dla $a \neq 0$, czyli $k \neq 0$ mamy równanie kwadratowe. Ogólnie takie równanie może mieć jedno lub dwa rozwiązania, albo żadnego. Zależy to od wartości wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$.

$\Delta = 0$ – jedno rozwiązanie, $\Delta > 0$ – dwa rozwiązania, $\Delta < 0$ brak rozwiązań, czyli zero.

$$\Delta = 7k^2 - 4(k - 1)(k + 1) \rightarrow \Delta = 7k^2 - 4(k^2 - 1^2) = 3k^2 + 4$$

Wyróżnik Δ jest funkcją kwadratową $z(k)$ parametru k . $z(k) = 3k^2 + 4$. $\Delta = z(k)$

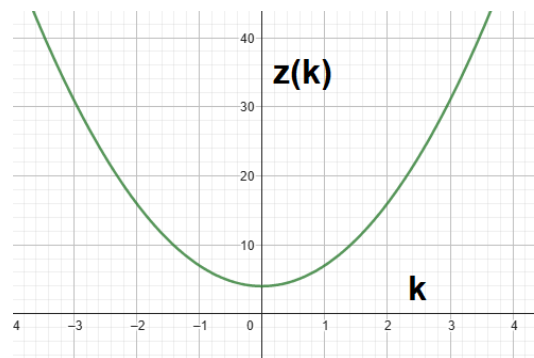
Zbadajmy przebieg funkcji $z(k)$. $\Delta_z = 0 - 4(3)(4) = -48 \rightarrow \Delta_z < 0$.

Wykresem $z(k)$ jest parabola.

Nie musimy dokładnie narysować tej paraboli. Wystarczy, że zauważymy, że we wzorze dla funkcji $z(k)$ współczynnik $a > 0$ czyli ramiona paraboli są skierowane do góry. $\Delta_z < 0$ czyli parabola nie przecina osi K .

Zatem:

$$z(k) > 0 \text{ dla dowolnego } k.$$



Gdy $a \neq 0$, czyli $k \neq 0$, to rozważane równanie ma zawsze dwa rozwiązania (bo $\Delta > 0$) dla dowolnej wartości parametru k . Innymi słowy, mamy dwa rozwiązania dla $k \in \mathbb{R}$.

Łącząc warunki 1° oraz 2° mamy, że dwa rozwiązania są dla: **$k \in \{(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)\}$**

Zatem:

$$f(k) = 1 \Leftrightarrow k = 1$$

$$f(k) = 2 \Leftrightarrow k \in \{(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)\}$$

