Zbiór zadań z matematyki jakie przerabiałem z moimi Bambikami.

Zbiór ten zawiera zadania ułożone przeze mnie oraz rozwiązania zadań zaczerpniętych z różnych źródeł. Między innymi są tu zadania z podręczników szkolnych lub zbiorów zadań wykorzystywanych w szkołach. Jest naturalne, że treść moich zadań jest też często w jakieś części inspirowana zadaniami z jakimi się spotkałem przeglądając różne źródła.

Ogólnie, jeśli zamieszczam tu rozwiązanie zadania z jakiegoś źródła staram się wskazać autorów tego zadania lub podać inną wskazówkę do oryginalnej treści zadania.

- Polecam dla dogłębniejszego poćwiczenia rozwiązywania tego typu zagadnień „Podręcznik do liceów i techników - MATEMATYKA" oraz „Zbiór zadań do liceów i techników - MATEMATYKA" autorstwa M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda.

  Jeśli zdecydujesz się na przerobienie tego bardzo ambitnego kursu, to z pewnością przydadzą Ci się te strony:

https://skul.pl/matematyka/matematyka-klasa-2-podrecznik-zakres-rozszerzony-rozwiazania-i-odpowiedzi,kid,721

https://skul.pl/matematyka/matematyka-klasa-2-zbior-zadan-zakres-rozszerzony-rozwiazania-i-odpowiedzi,kid,1287

- *W przypadku zadań dotyczących funkcji matematycznych szczególnie polecam korzystanie ze strony internetowej:* ***https://www.geogebra.org/graphing?lang=pl.***

  www.geogebra.org/graphing?lang=pl

  Większość zamieszczonych tu wykresów sporządziłem korzystając z tego narzędzia.

Optymalizacja funkcji kwadratowej - 4

Leksykon

Funkcja kwadratowa w postaci ogólnej: **y = f(x) = ax^2 + bx + c**

Wartości x dla których **y(x) = 0** nazywamy miejscami zerowymi → **$ax^2 + bx + c = 0$**

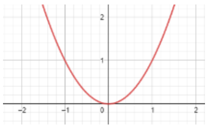
Miejsca zerowe funkcji kwadratowej:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4\,ac$$

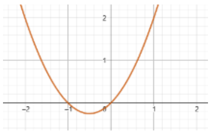
Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Jej wierzchołek ma współrzędne (**p**,**q**), gdzie:

$$p = \frac{-b}{2a} \qquad q = \frac{-\Delta}{4a}$$

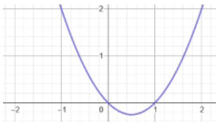
a > 0



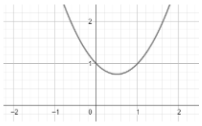
x^2



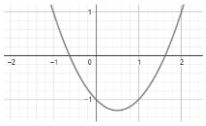
$x^2 + x$



$x^2 - x$



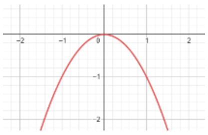
$x^2 - x + 1$



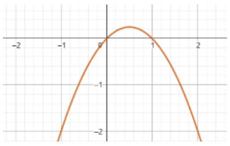
$x^2 - x - 1$

Gdy c = 0, to jedno miejsce zerowe funkcji [y(x) = 0] jest dla x = 0.

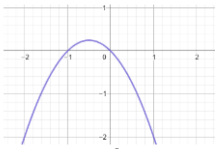
a < 0



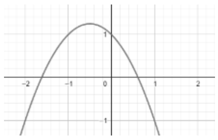
$-x^2$



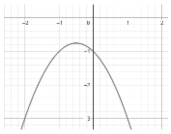
$-x^2 + x$



$-x^2 - x$



$-x^2 - x + 1$



$-x^2 - x - 1$

Gdy c = 0, to jedno miejsce zerowe funkcji

- Gdy **b = 0**, to współrzędna x wierzchołka paraboli jest równa x = 0. b ≠ 0 przesuwa wykres w poziomie. Gdy b = 0, to parabola jest symetryczna względem osi Y. Dla a>0. b > 0 wykres przesuwa się w lewo, b < 0 wykres przesuwa się w prawo. Dla a<0. b > 0 wykres przesuwa się w prawo, b < 0 wykres przesuwa się w lewo.
- Z postaci ogólnej funkcji kwadratowej mamy, że **f(0) = c**, wykres przecina oś Y w c.

  Gdy **c = 0**, to jedno miejsce zerowe jest w x = 0. c ≠ 0 przesuwa wykres w pionie.
- Współrzędna x_w = p wierzchołka paraboli leży pośrodku między wartościami x określającymi miejsca zerowe funkcji. Mamy więc x_1, x_w, x_2. Odległość $|x_1 - x_w|$ jest równa $|x_2 - x_w|$. $x_w = p = (x_1 + x_2)/2$.

Gdy mamy funkcję **f(x) = ax^2 + bx + c** i znamy miejsca zerowe tej funkcji **x_1** oraz **x_2**, to możemy zapisać tę funkcję w postaci iloczynowej:

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ → $b = a(x_1 + x_2)$ $c = ax_1x_2$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$f(x) = a(x - p)^2 + q$ → b = -2ap $c = ap^2 + q$

Wzory Viete'a: Jeżeli równanie ma dwa pierwiastki, to: **$x_1 + x_2 = -b/a$** **$x_1 \cdot x_2 = c/a$**

Zad. 1

Wyobraź sobie, że rzucasz pionowo do góry kamień z prędkością początkową $v_o = 10$ m/s.

Kamień w miarę upływu czasu t wznosi się i jego wysokość H opisuje następujące równanie znane z fizyki:

$H = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ gdzie g to jest tak zwane przyśpieszenie ziemskie $g \approx 10$ m/s^2

Czyli podstawiając podane wartości mamy: $H = 10t - 5t^2$ **$H = -5t^2 + 10t$**

Po jakim czasie t_w kamień znajdzie się w najwyższym punkcie swego lotu i jaka to będzie wysokość oraz po jakim czasie spadnie on na ziemię?

Mamy funkcję kwadratową $H(t) = at^2 + bt$. Jak widać: $c = 0$

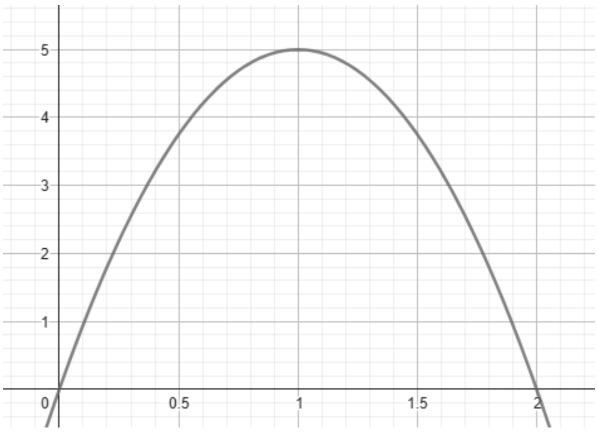
Wykresem tej funkcji jest parabola, której wierzchołek stanowi wartość maksymalną tej funkcji.

$t_w = \frac{-b}{2a} = \frac{-v_0}{-g} = \frac{v_0}{g}$ → $t_w = 10/10 = 1$ sekunda

$H_{max} = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = \frac{b^2}{4a} = -\frac{v_0^2}{-2g} = \frac{v_0^2}{2g}$ → $H_{max} = 100/20 = 5$m

Kamień będzie się wznosił na maksymalną wysokość przez czas 1 sekundy, a ta wysokość wynosić będzie 5 m.

Wykres funkcji:
$H = -5t^2 + 10t$



Kamień gdy osiągnie maksymalną wysokość, to zacznie spadać i po jakimś czasie spadnie na ziemię. Ten moment na wykresie odpowiada miejscu zerowemu funkcji H(t) dla $t \neq 0$.

$\boldsymbol{t_1} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$ oraz $\boldsymbol{t_2} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+b}{2a} = \mathbf{0}$

W chwili t_1 funkcja H(t) jest równa zero, czyli kamień znów jest na ziemi.

$\boldsymbol{t_1} = \frac{-b}{a} = \frac{-v_0}{-\frac{g}{2}} = \frac{2v_0}{g}$ → $t_1 = 20/10 = 2$ sekundy

Podsumowanie:

Kamień wznosił się na wysokość 10 metrów przez czas 1 sekundy i opadł na ziemię po 2 sekundach. Zatem czas opadania wynosił tyle samo co wznoszenia, czyli 1 sekundę.