Zbiór zadań z matematyki jakie przerabiałem z moimi Bambikami.

Zbiór ten zawiera zadania ułożone przeze mnie oraz rozwiązania zadań zaczerpniętych z różnych źródeł. Między innymi są tu zadania z podręczników szkolnych lub zbiorów zadań wykorzystywanych w szkołach. Jest naturalne, że treść moich zadań jest też często w jakieś części inspirowana zadaniami z jakimi się spotkałem przeglądając różne źródła.

Ogólnie, jeśli zamieszczam tu rozwiązanie zadania z jakiegoś źródła staram się wskazać autorów tego zadania lub podać inną wskazówkę do oryginalnej treści zadania.

- Polecam dla dogłębniejszego poćwiczenia rozwiązywania tego typu zagadnień „Podręcznik do liceów i techników - MATEMATYKA” oraz „Zbiór zadań do liceów i techników - MATEMATYKA” autorstwa M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda.

  Jeśli zdecydujesz się na przerobienie tego bardzo ambitnego kursu, to z pewnością przydadzą Ci się te strony:

https://skul.pl/matematyka/matematyka-klasa-2-podrecznik-zakres-rozszerzony-rozwiazania-i-odpowiedzi,kid,721

https://skul.pl/matematyka/matematyka-klasa-2-zbior-zadan-zakres-rozszerzony-rozwiazania-i-odpowiedzi,kid,1287

- *W przypadku zadań dotyczących funkcji matematycznych szczególnie polecam korzystanie ze strony internetowej:* ***https://www.geogebra.org/graphing?lang=pl.***

  www.geogebra.org/graphing?lang=pl

  Większość zamieszczonych tu wykresów sporządziłem korzystając z tego narzędzia.

Optymalizacja funkcji kwadratowej - 3

Leksykon

Funkcja kwadratowa w postaci ogólnej: **$y = f(x) = ax^2 + bx + c$**

Wartości x dla których **$y(x) = 0$** nazywamy miejscami zerowymi → **$ax^2 + bx + c = 0$**

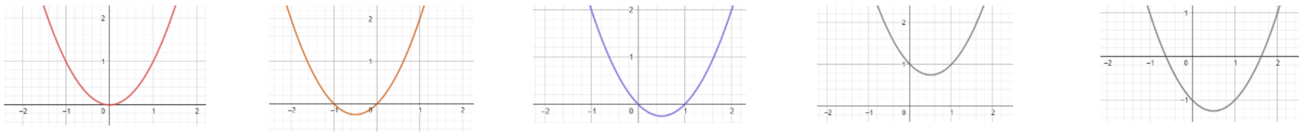
Miejsca zerowe funkcji kwadratowej:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4\,ac$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Jej wierzchołek ma współrzędne (**p**,**q**), gdzie:

$$p = \frac{-b}{2a} \qquad q = \frac{-\Delta}{4a}$$

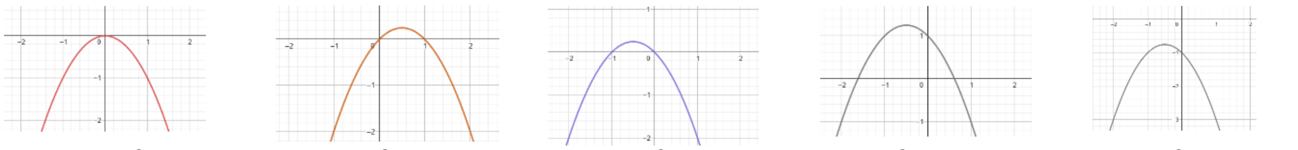
a > 0



x^2 | $x^2 + x$ | $x^2 - x$ | $x^2 - x + 1$ | $x^2 - x - 1$

Gdy c = 0, to jedno miejsce zerowe funkcji [y(x) = 0] jest dla x = 0.

a < 0



$-x^2$ | $-x^2 + x$ | $-x^2 - x$ | $-x^2 - x + 1$ | $-x^2 - x - 1$

Gdy c = 0, to jedno miejsce zerowe funkcji

- Gdy **b = 0**, to współrzędna x wierzchołka paraboli jest równa x = 0. b ≠ 0 przesuwa wykres w poziomie. Gdy b = 0, to parabola jest symetryczna względem osi Y. Dla a>0. b > 0 wykres przesuwa się w lewo, b < 0 wykres przesuwa się w prawo. Dla a<0. b > 0 wykres przesuwa się w prawo, b < 0 wykres przesuwa się w lewo.
- Z postaci ogólnej funkcji kwadratowej mamy, że **f(0) = c**, wykres przecina oś Y w c.

  Gdy **c = 0**, to jedno miejsce zerowe jest w x = 0. c ≠ 0 przesuwa wykres w pionie.
- Współrzędna x_w = p wierzchołka paraboli leży pośrodku między wartościami x określającymi miejsca zerowe funkcji. Mamy więc x_1, x_w, x_2. Odległość $|x_1 - x_w|$ jest równa $|x_2 - x_w|$. $x_w = p = (x_1 + x_2)/2$.

Gdy mamy funkcję **$f(x) = ax^2 + bx + c$** i znamy miejsca zerowe tej funkcji **x_1** oraz **x_2**, to możemy zapisać tę funkcję w postaci iloczynowej:

$$\mathbf{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)} \quad \rightarrow \quad b = a(x_1 + x_2) \qquad c = ax_1x_2$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$\mathbf{f(x) = a(x - p)^2 + q} \quad \rightarrow \quad b = -2ap \qquad c = ap^2 + q$$

Wzory Viete'a: Jeżeli równanie ma dwa pierwiastki, to: **$x_1 + x_2 = -b/a$** **$x_1 \cdot x_2 = c/a$**

Zad. 1

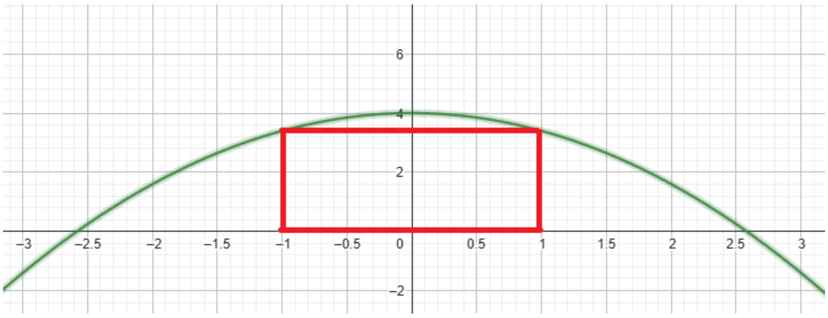
Przekrój poprzeczny tunelu jest opisany krzywą stanowiącą wykres funkcji:

$$f(x) = -0,6x^2 + 4$$

Jaką może mieć maksymalną wysokość H pojazd o szerokości d = 2 m by mógł przejechać tym tunelem?

$f(1) = -0,6\ 1^2 + 4 = 3,4$

$f(x) = -0,6x^2 + 4$



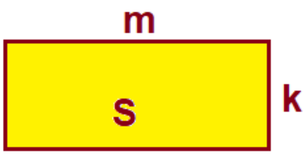
$f(1) = -0,6 + 4 = 3,4$

Maksymalna wysokość pojazdu wynosi 3,4 m.

Zad. 2 3.101 - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Krótszy bok prostokąta o wymiarach 5 cm x 8 cm zwiększamy o **x** cm, a dłuższy zmniejszamy o **x** cm.

- Wyznacz wzór funkcji opisującej pole nowego prostokąta w zależności od x i podaj dziedzinę tej funkcji.
- Dla jakiej długości x, pole otrzymanego prostokąta jest największe? Oblicz to pole.



m = 8 cm, k = 5 cm

Pole prostokąta: S(x) = (m – x)(k + x)

Dziedziną funkcji S(x) jest przedział wartości x: <0, 8)

S(x) = (8 – x) (5 + x) → $S(x) = 40 + 8x – 5x – x^2$

$$\mathbf{S(x) = -x^2 + 3x + 40}$$

Wykresem funkcji kwadratowej S(x) jest parabola. Maksymalna wartość S(x) jest w punkcie stanowiącym wierzchołek paraboli.

Współrzędna x wierzchołka tej paraboli jest dana wzorem: p = -b/2a = -3/(-2) = 1,5

Maksymalna powierzchnia rozpatrywanego prostokąta będzie wtedy, gdy odpowiednio zmienimy wymiary jego boków o 1,5 cm (kwadrat 6,5 cm · 6,5cm).

Pole takiego kwadratu:

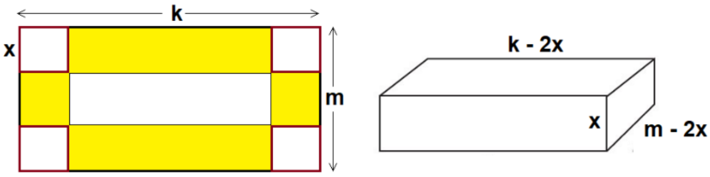
$S(x=1,5) = -1,5x^2 + 3 \cdot 1,5 + 40 = 42,25\ cm^2$

Wykres funkcji

$\mathbf{S(x) = -x^2 + 3x + 40}$

Zad. 3 3.102 - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Z prostokątnego arkusza tektury o wymiarach 20 cm · 30 cm odcięto w rogach kwadraty, których boki mają długość x cm. Następnie po zagięciu powstałych brzegów zbudowano prostopadłościan tworzący otwarte pudełko – patrz rysunek niżej.



Żółtym kolorem oznaczono pole powierzchni boczne pudełka.

k = 30 cm, m = 20 cm

- Wyznacz wzór funkcji opisującej pole powierzchni bocznej tego pudełka w zależności od x.
- Dla jakiej wartości x pole powierzchni bocznej pudełka jest największe. Oblicz to pole.

Pole powierzchni bocznej pudełka (żółte pole):

$$\mathbf{S(x) = 2(k - 2x)x + 2(m - 2x)x}$$

$S(x) = 2(30 - 2x)x + 2(20 - 2x)x$

Dziedziną funkcji jest przedział wartości x: (0, 10)

$S(x) = 60x - 4x^2 + 40x - 4x^2$

$S(x) = -8x^2 + 100x$

Szukamy maksimum powyższej funkcji. Wykresem funkcji kwadratowej S(x) jest parabola. Maksymalna wartość S(x) jest w punkcie stanowiącym wierzchołek paraboli.

Współrzędna x wierzchołka tej paraboli jest dana wzorem: $p = -b/2a = -100/(-16) = 6{,}25$

Aby otrzymać pudełko o największej bocznej powierzchni należy wyciąć kwadraty o bokach 6,25 cm.

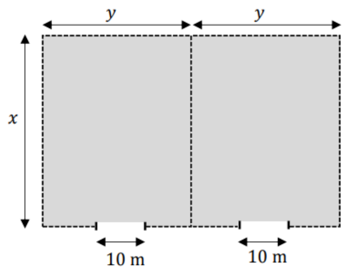
$S(x = 6{,}25) = -8 \cdot 6{,}25^2 + 100 \cdot 6{,}25 = -312{,}5 + 625 = 312{,}5\ cm^2$

Wykres funkcji

$S(x) = -8x^2 + 100x$

Zad. 4 (https://www.matemaks.pl/zadania-optymalizacyjne-z-funkcji-kwadratowej.html)

Powierzchnia magazynowa będzie się składała z dwóch identycznych prostokątnych działek połączonych wspólnym bokiem. Całość ma być ogrodzona płotem, przy czym obie działki będzie rozdzielał wspólny płot. W ogrodzeniu będą zamontowane dwie bramy wjazdowe, każda o szerokości 10 m (zobacz rysunek poniżej). Łączna długość płotu ogradzającego oraz rozdzielającego obie działki wyniesie 580 metrów, przy czym szerokości obu bram wjazdowych nie wliczają się w długość płotu.



Oblicz wymiary x i y każdej z dwóch prostokątnych działek, tak aby całkowite pole powierzchni magazynowej było największe.

Widać, że długość płotu określa równanie: $3x + 4y - 20 = 580 \rightarrow 3x + 4y = 600$

Suma $3x + 4y$ jest stała, co oznacza, że jeśli x rośnie to y maleje. Wartość x może zmieniać się od $x_{min} = 0$ do $3x = 600$ (wtedy $y = 0$), czyli $x_{max} = 200$. Zmienność x określa przedział (0,200).

Pole powierzchni magazynowej określa wzór: $P = x \cdot 2y = 2xy$

Z równania $3x + 4y = 600$ mamy, że $4y = 600 - 3x$, czyli: $\mathbf{y = 150 - 0{,}75x}$

Stąd: $P(x) = 2x(150 - 0{,}75x) \rightarrow P(x) = -1{,}5x^2 + 300x$

Badamy kiedy funkcja P(x) ma maksimum – szukamy współrzędnych wierzchołka paraboli P(x).

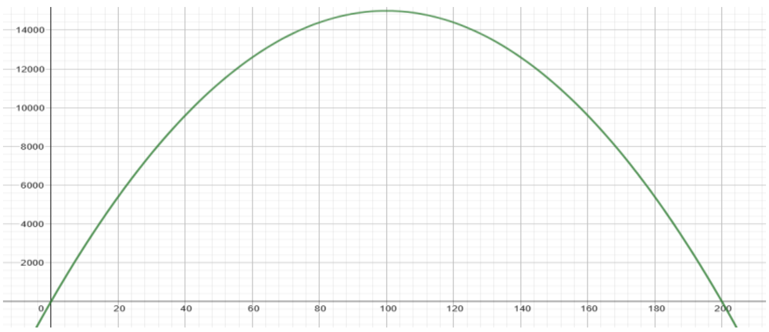
$x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{-300}{-3} = 100$ $\quad \mathbf{x_w = 100m} \quad$ $y_w = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{300^2+0}{-6} = 15\,000$

$\mathbf{y_w = 15\,000m^2}$

Jeśli optymalna wartość $x_{opt} = 100$, to $y_{opt} = 150 - 0{,}75x_{opt} = 150 - 75 = 75$

Zatem, jeśli chcemy by pole magazynowe było jak największe to wymiary ogrodzenia winny wynosić: $x_{opt} = 100m$ i $y_{opt} = 75m$

Wykres
$P(x) = -1{,}5x^2 + 300x$



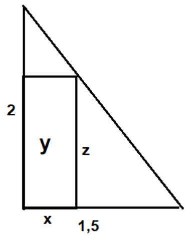
Zad. 5 3.107 - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Z kawałka materiału w kształcie trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 2m i 1,5m chcemy wyciąć prostokąt, tak jak na rysunku. Jakie powinny być wymiary prostokąta, aby jego pole było jak największe? Jaka będzie powierzchnia tego pola?

Pole wyciętego prostokąta: y.

Boki prostokąta: x, z.

Pole materiału P.



Pole wyciętego prostokąta $y = x \cdot z$

Pole całego materiału obliczone jako pole trójkąta: $P_1 = (2 \cdot 1{,}5)/2 = 1{,}5$

Pole materiału policzone jako suma jego kawałków: $P_2 = x \cdot z + z(1{,}5 - x)/2 + x(2 - z)/2$

Oczywiście $P_1 = P_2$. $\rightarrow$ $1{,}5 = x \cdot z + z(1{,}5 - x)/2 + x(2 - z)/2$

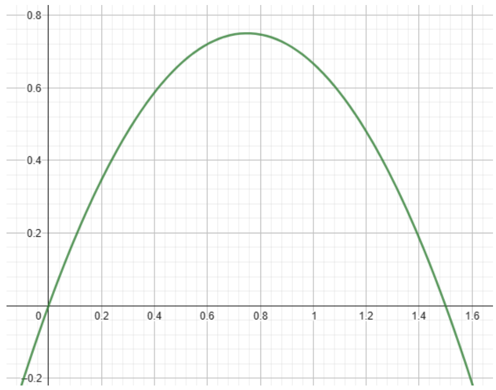
$1{,}5 = xz + 0{,}75z - 0{,}5xz + x - 0{,}5xz$ $\rightarrow$ $0{,}75z + x = 1{,}5$

$0{,}75z = 1{,}5 - x$ $\rightarrow$ $z = 2 - x/0{,}75$ $\rightarrow$ $\mathbf{z = 2 - 4x/3}$

$y = x \cdot z = x \cdot (2 - 4x/3)$ $\rightarrow$ $y = -4x^2/3 + 2$

y(x) jest funkcją kwadratową. Funkcja ta określa pole wyciętego prostokąta. Szukamy maksimum tej funkcji.

Współczynnik a = -4/3 jest ujemny, czyli wykresem funkcji y(x) jest parabola o ramionach skierowanych do dołu. Wierzchołek tej paraboli określa maksimum tej funkcji.



Jak wiemy, współrzędna x wierzchołka paraboli równa się: **p = -b/2a**

$$p = \frac{-2}{-2\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Bok x prostokąta ma długość **0,75 m**.

Drugi bok prostokąta ma długość: **z = 2 – 4x/3** $\rightarrow$ $z = 2 - \ 4\frac{\frac{3}{4}}{3} = 2 - 4\frac{3}{12} \ = 2 - 1 = 1$

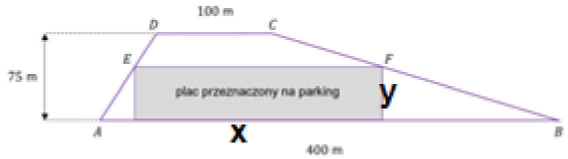
Bok z prostokąta ma długość **1 m**.

Powierzchnia wyciętego prostokąta: $y = x \cdot z$ $\rightarrow$ y = 0,75m· 1m = **0,75m²** .

Zad. 6 (https://www.matemaks.pl/zadania-optymalizacyjne-z-funkcji-kwadratowej.html)

Działka ma kształt trapezu. Podstawy AB i CD tego trapezu mają długości |AB|=400 m oraz |CD|=100 m. Wysokość trapezu jest równa 75 m, a jego kąty DAB i ABC są ostre.

Z działki postanowiono wydzielić plac w kształcie prostokąta z przeznaczeniem na parking. Dwa z wierzchołków tego prostokąta mają leżeć na podstawie AB tego trapezu, a dwa pozostałe - E oraz F - na ramionach AD i BC trapezu (zobacz rysunek).



wprowadźmy oznaczenia: d = 400, e = 100, h 75

Wyznacz długości boków prostokąta x i y, dla których powierzchnia P wydzielonego placu będzie największa. Wyznacz tę największą powierzchnię.

Pole całego trapezu ABCD jest dane wzorem: $P_t = (d + e)h/2$

Pole trapezu ABFE dane jest wzorem: $P_1 = (d + x)y/2$

Pole trapezu EFCD dane jest wzorem: $P_2 = (x + e)(h - y)/2$

Widać, że: $P_t = P_1 + P_2$

$(d + e)h/2 = (d + x)y/2 + (x + e)(h - y)/2 \quad \rightarrow \quad (d + e)h = (d + x)y + (x + e)(h - y)$

$(d + e)h = dy + xy + xh - xy + eh - ey \quad \rightarrow \quad (d + e)h = dy - ey + xh + eh$

$y(d - e) = (d + e)h - xh - eh \quad \rightarrow \quad y(d - e) = dh + eh - xh - eh \quad \rightarrow y(d - e) = -xh + dh$

Otrzymaliśmy następujący związek między y a x: $y = h(-x + d)/(d - e)$

Pole rozpatrywanego prostokąta dane jest wzorem: $P = x\cdot y$

$$P(x) = x\frac{h(-x + d)}{d - e} = -\frac{h}{d - e}x^2 + \frac{hd}{d - e}x$$

Funkcja opisująca pole rozpatrywanego prostokąta jest funkcją kwadratową typu $y = ax^2 + b$.

Współczynnik $a < 0$ czyli wierzchołek paraboli stanowiącej wykres funkcji jest jej maksimum.

Współrzędna x_w wierzchołka paraboli:

$x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{-hd(d-e)}{-2(d-e)h} = \frac{d}{2} \quad \rightarrow \quad x_w = d/2 = 400m/2 = 200m$

Wyżej otrzymaliśmy, że: $y = \frac{h(-x+d)}{d-e}$ czyli dla $x_w = d/2$ mamy:

$y = \frac{h(-x_w+d)}{d-e} = -\frac{hx_w}{d-e} + \frac{hd}{d-e} = \frac{hd}{d-e} - 0{,}5\frac{hd}{d-e} = 0{,}5\frac{hd}{d-e} \quad \rightarrow \quad y = 0{,}5hd(d - e) = 0{,}5\cdot 75\cdot 400/(400-100)$

Stąd: y = 50m

Zatem wtedy pole $P = x\cdot y = 200m\cdot 50m = 10000m^2$.