

*Zbiór zadań z matematyki jakie przerabiałem z moimi Bambikami.*

*Zbiór ten zawiera zadania ułożone przeze mnie oraz rozwiązania zadań zaczerpniętych z różnych źródeł. Między innymi są tu zadania z podręczników szkolnych lub zbiorów zadań wykorzystywanych w szkołach. Jest naturalne, że treść moich zadań jest też często w jakiejś części inspirowana zadaniami z jakimi się spotkałem przeglądając różne źródła.*

*Ogólnie, jeśli zamieszczam tu rozwiązanie zadania z jakiegoś źródła staram się wskazać autorów tego zadania lub podać inną wskazówkę do oryginalnej treści zadania.*

- Polecam dla dogłębszego poćwiczenia rozwiązywania tego typu zagadnień „Podręcznik do liceów i techników - MATEMATYKA” oraz „Zbiór zadań do liceów i techników - MATEMATYKA” autorstwa M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda.

Jeśli zdecydujesz się na przerobienie tego bardzo ambitnego kursu, to z pewnością przydadzą Ci się te strony:

<https://skul.pl/matematyka/matematyka-klasa-2-podrecznik-zakres-rozszerzony-rozwiazania-i-odpowiedzi,kid,721>

<https://skul.pl/matematyka/matematyka-klasa-2-zbior-zadan-zakres-rozszerzony-rozwiazania-i-odpowiedzi,kid,1287>

- W przypadku zadań dotyczących funkcji matematycznych szczególnie polecam korzystanie ze strony internetowej: **<https://www.geogebra.org/graphing?lang=pl>**.

[www.geogebra.org/graphing?lang=pl](https://www.geogebra.org/graphing?lang=pl)

*Większość zamieszczonych tu wykresów sporządziłem korzystając z tego narzędzia.*

## Optymalizacja funkcji kwadratowej - 2

Leksykon

Funkcja kwadratowa w postaci ogólnej:  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Wartości  $x$  dla których  $y(x) = 0$  nazywamy miejscami zerowymi  $\rightarrow ax^2 + bx + c = 0$

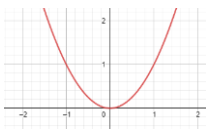
Miejsca zerowe funkcji kwadratowej:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

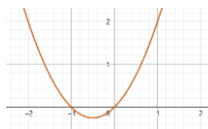
Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Jej wierzchołek ma współrzędne  $(p, q)$ , gdzie:

$$p = \frac{-b}{2a} \quad q = \frac{-\Delta}{4a}$$

**$a > 0$**



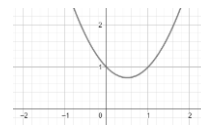
$x^2$



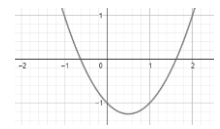
$x^2 + x$



$x^2 - x$



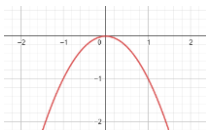
$x^2 - x + 1$



$x^2 - x - 1$

Gdy  $c = 0$ , to jedno miejsce zerowe funkcji  $[y(x) = 0]$  jest dla  $x = 0$ .

**$a < 0$**



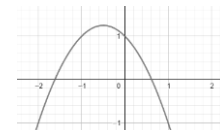
$-x^2$



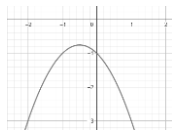
$-x^2 + x$



$-x^2 - x$



$-x^2 - x + 1$



$-x^2 - x - 1$

Gdy  $c = 0$ , to jedno miejsce zerowe funkcji

- Gdy  $b = 0$ , to współrzędna  $x$  wierzchołka paraboli jest równa  $x = 0$ .  $b \neq 0$  przesuwa wykres w poziomie. Gdy  $b = 0$ , to parabola jest symetryczna względem osi  $Y$ . Dla  $a > 0$ .  $b > 0$  wykres przesuwa się w lewo,  $b < 0$  wykres przesuwa się w prawo. Dla  $a < 0$ .  $b > 0$  wykres przesuwa się w prawo,  $b < 0$  wykres przesuwa się w lewo.
- Z postaci ogólnej funkcji kwadratowej mamy, że  $f(0) = c$ , wykres przecina oś  $Y$  w  $c$ .  
Gdy  $c = 0$ , to jedno miejsce zerowe jest w  $x = 0$ .  $c \neq 0$  przesuwa wykres w pionie.
- Współrzędna  $x_w = p$  wierzchołka paraboli leży pośrodku między wartościami  $x$  określającymi miejsca zerowe funkcji. Mamy więc  $x_1, x_w, x_2$ . Odległość  $|x_1 - x_w|$  jest równa  $|x_2 - x_w|$ .  
 $x_w = p = (x_1 + x_2)/2$ .

Gdy mamy funkcję  $f(x) = ax^2 + bx + c$  i znamy miejsca zerowe tej funkcji  $x_1$  oraz  $x_2$ , to możemy zapisać tę funkcję w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \rightarrow \quad b = a(x_1 + x_2) \quad c = ax_1x_2$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q \quad \rightarrow \quad b = -2ap \quad c = ap^2 + q$$

**Wzory Viete'a:** Jeżeli równanie ma dwa pierwiastki, to:  $x_1 + x_2 = -b/a$      $x_1 \cdot x_2 = c/a$

**Zad. 1** 3.101 - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Funkcja  $f(x) = 0,5(-x^2 + 6x + 21)$  opisuje wydajność pracy robotnika w zależności od czasu pracy  $x$  w ciągu 8-godzinnego dnia pracy. Robotnik rozpoczyna pracę o godzinie  $7^{00}$ .

O której godzinie jego wydajność jest największa?

$$f(x) = -0,5x^2 + 3x + 10,5$$

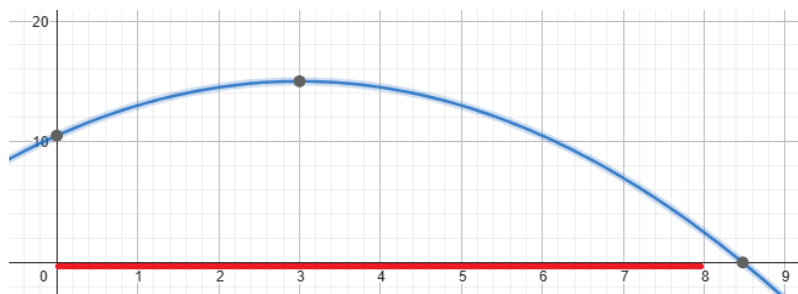
Funkcja  $f(x)$  ma maksimum dla  $p = -b/2a$ .  $\rightarrow p = -3/(2 \cdot -0,5) = 3$

Wartość  $x = 0$  odpowiada godzinie  $7^{00}$ .

Zatem maksymalna wydajność pracownika jest o godzinie  $7^{00} + 3 = 10^{00}$ .

Robotnik pracuje najwydajniej o godzinie  $10^{00}$

$$f(x) = -0,5x^2 + 3x + 10,5$$



Czerwoną linią zaznaczono dziedzinę funkcji. Przedział zmienności  $x$ :  $\langle 0, 8 \rangle$

Zad. 2

Mała firma produkuje lampy. Stwierdzono, że miesięczny przychód w złotych ze sprzedaży lamp opisuje funkcja:  $P(x) = 110 \cdot x$ , gdzie  $x$  to ilość sprzedanych lamp.

Koszt w złotych produkcji  $x$  lamp w ciągu miesiąca opisuje funkcja:  $K(x) = 30x + 0,5x^2$ .

Zakład jest w stanie wyprodukować miesięcznie maksymalnie 120 lamp.

- Podaj w złotych cenę sprzedaży pojedynczej lampy.
- Oblicz ile miesięcznie należy produkować i sprzedawać lamp, aby zysk był największy. Jaki wtedy ten zysk będzie?

Zysk miesięczny:  $Z(x) = P(x) - K(x)$

$$Z(x) = 110x - 30x - 0,5x^2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{Z(x) = -0,5x^2 + 80x}$$

Wykresem funkcji jest parabola, której wierzchołek stanowi określa największą wartość tej funkcji. Należy więc znaleźć współrzędną  $x$  tego wierzchołka.

$$p = \frac{-b}{2a} \quad \rightarrow \quad p = -80/(-1) = 80$$

Firma osiągnie maksymalny zysk gdy będzie produkować i sprzedawać 80 lamp miesięcznie.

Zysk w złotych z takiej sprzedaży wyniesie:

$$Z(x) = -0,5x^2 + 80x \quad \rightarrow \quad Z(80) = -3200 + 6400 = 3200$$

Cena sprzedaży jednej lampy:  $P(x) = 110 \cdot x \quad \rightarrow \quad \text{dla } x = 1 \quad P(1) = 110 \text{ zł}$

Wykres funkcji:  
 $\mathbf{Z(x) = -0,5x^2 + 80x}$



**Zad. 3** (<https://www.matemaks.pl/zadania-ptymalizacyjne-z-funkcji-kwadratowej.html>)

Zakład stolarski produkuje krzesła, które sprzedaje po 196 złotych za sztukę. Właściciel, na podstawie analizy rzeczywistych wpływów i wydatków, stwierdził, że:

przychód  $P$  (w złotych) ze sprzedaży  $x$  krzesel można opisać funkcją  $P(x) = 196x$ , a koszt  $K$  (w złotych) produkcji  $x$  krzesel dziennie można opisać funkcją:

$$K(x) = 4x^2 + 4x + 240$$

Dziennie w zakładzie można wyprodukować co najwyżej 30 krzesel. Oblicz, ile krzesel powinien dziennie sprzedawać zakład, aby zysk ze sprzedaży krzesel wyprodukowanych przez ten zakład w ciągu jednego dnia był możliwie największy. Oblicz ten największy zysk.

Zysk:  $Z(x) = P(x) - K(x)$

$$Z(x) = 196x - 4x^2 - 4x - 240 \rightarrow \mathbf{Z(x) = -4x^2 + 192x - 240} \quad x \in \{1 \dots 29, 30\}$$

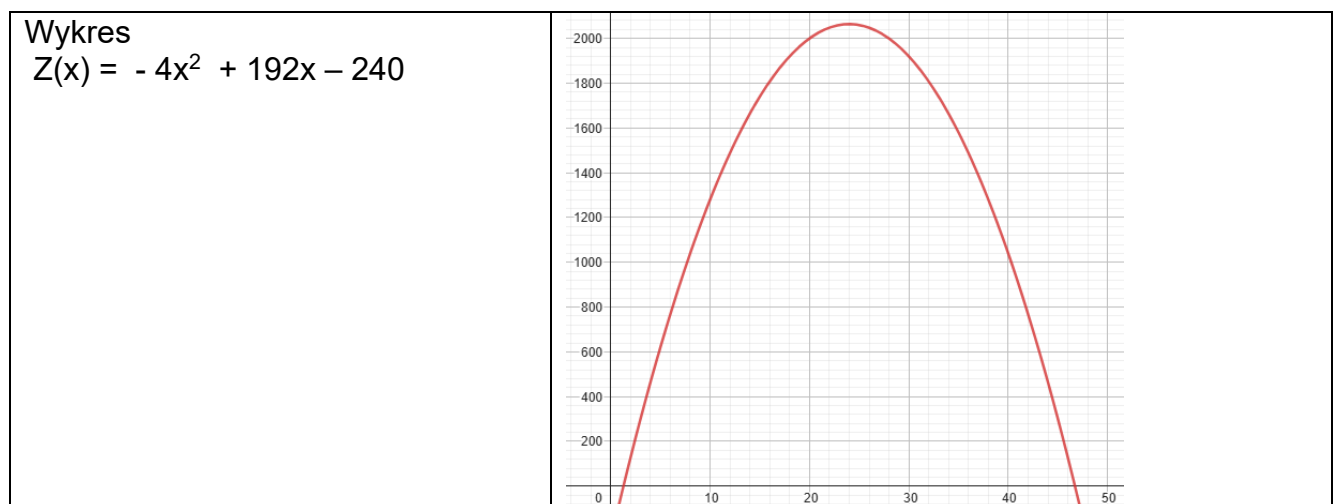
Ponieważ  $a < 0$ , to wiemy że funkcja  $Z(x)$  ma wierzchołek dla swojej maksymalnej wartości.

Współrzędne wierzchołka, to:

$$x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{-192}{-8} = 24 \quad y_w = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{192^2 - 3840}{-16} = 2064$$

Widać, że:  $x_w$  należy do dziedziny funkcji.

Najbardziej opłacalna jest produkcja, gdy dziennie produkuje się 24 krzesła i wtedy osiąga się zysk w wysokości 2064zł.  $Z(24) = 2064$ .



**Wyjaśnienie**

*Jest naturalne, że koszt wyprodukowania krzesła może się zmieniać w zależności od ilości wyprodukowanych krzesel. Powiedzmy, że pierwsze krzesła są produkowane, gdy pracownicy nie mają jeszcze wprawy i być może koszt produkcji jest wtedy nawet powyżej przychodu ze sprzedaży. Potem pracownicy są coraz bardziej wydajni. Jednakże po wyprodukowaniu pewnej ilości krzesel wydajność pracowników spada, przykładowo wskutek ich zmęczenia.*

**Zad. 4** (<https://www.matemaks.pl/zadania-optimalizacyjne-z-funkcji-kwadratowej.html>)

Właściciel pewnej apteki przeanalizował dane dotyczące liczby obsługiwanych klientów z 30 kolejnych dni. Przyjmijmy, że liczbę  $L$  obsługiwanych klientów  $n$ -tego dnia opisuje funkcja:

$$L(n) = -n^2 + 22n + 279$$

gdzie  $n$  (numer dnia w miesiącu) jest liczbą naturalną spełniającą warunki  $n \geq 1$  i  $n \leq 30$ .

Którego dnia analizowanego okresu w aptecę obsłużono największą liczbę klientów?

Oblicz liczbę klientów obsłużonych tego dnia.

Należy znaleźć maksimum funkcji  $L(n)$  w przedziale  $1 \leq x \leq 30$ .

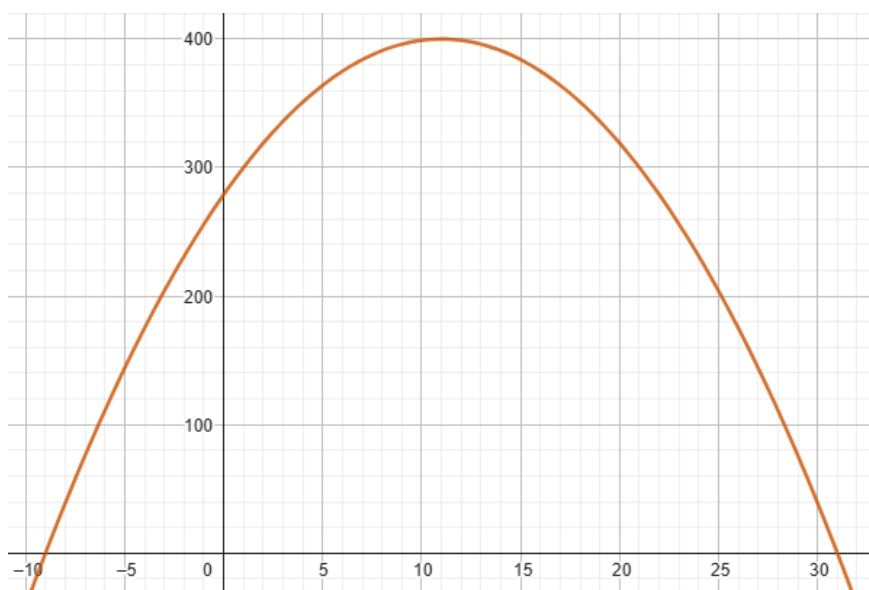
$$x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{-22}{-2} = 11 \quad y_w = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{22^2 + 1116}{-4} = 400$$

Widać, że:  $x_w$  należy do dziedziny funkcji.

Największą liczbę klientów, czyli 400, obsłużono 11 dnia.  $L(11) = 400$ .

Wykres

$$L(n) = -n^2 + 22n + 279$$



**Zad. 5** <https://szkolamaturzystow.pl/baza-wiedzy/1609761099-badanie-funkcji-kwadratowej-zadania- optymalizacyjne>

Sprzedawca kupuje męskie bluzy w cenie 55zł i sprzedaje je za 125zł. Miesięcznie sprzedaje 42 bluzy. Po zbadaniu rynku przez sprzedawcę okazuje się że gdyby zmniejszył cenę o 1zł to ilość sprzedanych bluz zwiększyła by się o 1 sztukę, Gdyby zmniejszył cenę o 2zł to ilość sprzedanych bluz zwiększyła by się o 2 sztuki, itd.

Jaką cenę powinien ustalić sprzedawca aby jego miesięczny zysk był największy?

Koszt zakupu jednej bluzy  $k = 55$

Cena sprzedaży jednej bluzy:  $d = 125 - x$  gdzie:

$x$  – kwota obniżki ceny jednej bluzy.  $x$  należy do przedziału  $\langle 0, 70 \rangle$ . Dla  $x = 0$  nie byłoby obniżki, a dla  $x = 70$  byłaby to sprzedaż bez zysku i dla  $x > 70$  byłaby strata.

Liczba sprzedawanych bluz w miesiącu:  $L = 42 + x$

Zysk:  $Z = L \cdot (d - k)$

$$Z = (42 + x)(125 - x - k) \rightarrow Z = (42 + x)(125 - x - 55) \rightarrow Z = (42 + x)(70 - x)$$

$$Z = 2940 - 42x + 70x - x^2$$

$$\mathbf{Z = -x^2 + 28x + 2940}$$

Wykresem funkcji jest parabola, której wierzchołek stanowi określa największą wartość tej funkcji. Należy więc znaleźć współrzędną  $x$  tego wierzchołka.

$$p = \frac{-b}{2a} \rightarrow p = -28/(-2) = 14$$

Sprzedawca osiągnie maksymalny zysk gdy dokona obniżki ceny jednej bluzy o  $x = 14$  zł.

Zatem cena jednej bluzy powinna wynosić:

$$d = 125 - x \rightarrow d = 125\text{zł} - 14\text{zł} = 111\text{zł}$$

Miesięczna ilość sprzedawanych bluz:  $L = 42 + x \rightarrow L = 56$

Miesięczny zysk ze sprzedaży: Zysk:  $Z = L \cdot (d - k) \rightarrow Z = 56(111 - 55) = 56 \cdot 56 = 3136\text{zł}$

Wykres funkcji:

$$\mathbf{Z = -x^2 + 28x + 2940}$$

