Zbiór zadań z matematyki jakie przerabiałem z moimi Bambikami.

Zbiór ten zawiera zadania ułożone przeze mnie oraz rozwiązania zadań zaczerpniętych z różnych źródeł. Między innymi są tu zadania z podręczników szkolnych lub zbiorów zadań wykorzystywanych w szkołach. Jest naturalne, że treść moich zadań jest też często w jakieś części inspirowana zadaniami z jakimi się spotkałem przeglądając różne źródła.

Ogólnie, jeśli zamieszczam tu rozwiązanie zadania z jakiegoś źródła staram się wskazać autorów tego zadania lub podać inną wskazówkę do oryginalnej treści zadania.

- Polecam dla dogłębniejszego poćwiczenia rozwiązywania tego typu zagadnień „Podręcznik do liceów i techników - MATEMATYKA” oraz „Zbiór zadań do liceów i techników - MATEMATYKA” autorstwa M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda.

  Jeśli zdecydujesz się na przerobienie tego bardzo ambitnego kursu, to z pewnością przydadzą Ci się te strony:

https://skul.pl/matematyka/matematyka-klasa-2-podrecznik-zakres-rozszerzony-rozwiazania-i-odpowiedzi,kid,721

https://skul.pl/matematyka/matematyka-klasa-2-zbior-zadan-zakres-rozszerzony-rozwiazania-i-odpowiedzi,kid,1287

- *W przypadku zadań dotyczących funkcji matematycznych szczególnie polecam korzystanie ze strony internetowej:* ***https://www.geogebra.org/graphing?lang=pl.***

  www.geogebra.org/graphing?lang=pl

  Większość zamieszczonych tu wykresów sporządziłem korzystając z tego narzędzia.

Optymalizacja funkcji kwadratowej - 1

Leksykon

Funkcja kwadratowa w postaci ogólnej: **$y = f(x) = ax^2 + bx + c$**

Wartości x dla których **$y(x) = 0$** nazywamy miejscami zerowymi → **$ax^2 + bx + c = 0$**

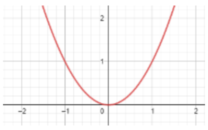
Miejsca zerowe funkcji kwadratowej:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4\,ac$$

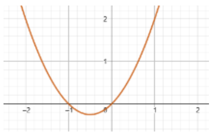
Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Jej wierzchołek ma współrzędne (**p**,**q**), gdzie:

$$p = \frac{-b}{2a} \qquad q = \frac{-\Delta}{4a}$$

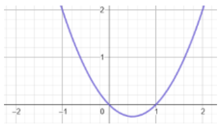
a > 0



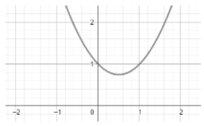
x^2



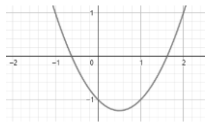
$x^2 + x$



$x^2 - x$



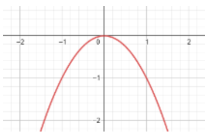
$x^2 - x + 1$



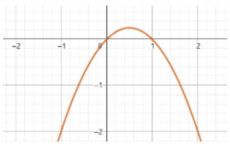
$x^2 - x - 1$

Gdy c = 0, to jedno miejsce zerowe funkcji [y(x) = 0] jest dla x = 0.

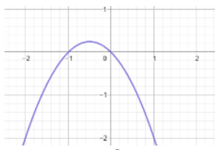
a < 0



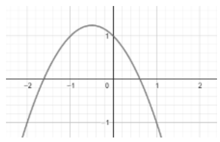
$-x^2$



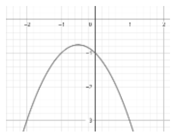
$-x^2 + x$



$-x^2 - x$



$-x^2 - x + 1$



$-x^2 - x - 1$

Gdy c = 0, to jedno miejsce zerowe funkcji

- Gdy **b = 0**, to współrzędna x wierzchołka paraboli jest równa x = 0. b ≠ 0 przesuwa wykres w poziomie. Gdy b = 0, to parabola jest symetryczna względem osi Y. Dla a>0. b > 0 wykres przesuwa się w lewo, b < 0 wykres przesuwa się w prawo. Dla a<0. b > 0 wykres przesuwa się w prawo, b < 0 wykres przesuwa się w lewo.
- Z postaci ogólnej funkcji kwadratowej mamy, że **f(0) = c**, wykres przecina oś Y w c.

  Gdy **c = 0**, to jedno miejsce zerowe jest w x = 0. c ≠ 0 przesuwa wykres w pionie.
- Współrzędna x_w = p wierzchołka paraboli leży pośrodku między wartościami x określającymi miejsca zerowe funkcji. Mamy więc x_1, x_w, x_2. Odległość $|x_1 - x_w|$ jest równa $|x_2 - x_w|$. $x_w = p = (x_1 + x_2)/2$.

Gdy mamy funkcję **$f(x) = ax^2 + bx + c$** i znamy miejsca zerowe tej funkcji **x_1** oraz **x_2**, to możemy zapisać tę funkcję w postaci iloczynowej:

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ → $b = a(x_1 + x_2)$ $c = ax_1x_2$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$f(x) = a(x - p)^2 + q$ → $b = -2ap$ $c = ap^2 + q$

Wzory Viete'a: Jeżeli równanie ma dwa pierwiastki, to: **$x_1 + x_2 = -b/a$** **$x_1 \cdot x_2 = c/a$**

Zad. 1 3.97 - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Liczbę 100 przedstaw w postaci sumy dwóch takich liczb, których suma kwadratów jest najmniejsza.

Poszukiwane liczby: x, z. Suma ich kwadratów: S.

100 = x + z → **z = 100 - x**

$S = x^2 + z^2$

$S = x^2 + (100 - x)^2$

$S = x^2 + 10000 - 200x + x^2$

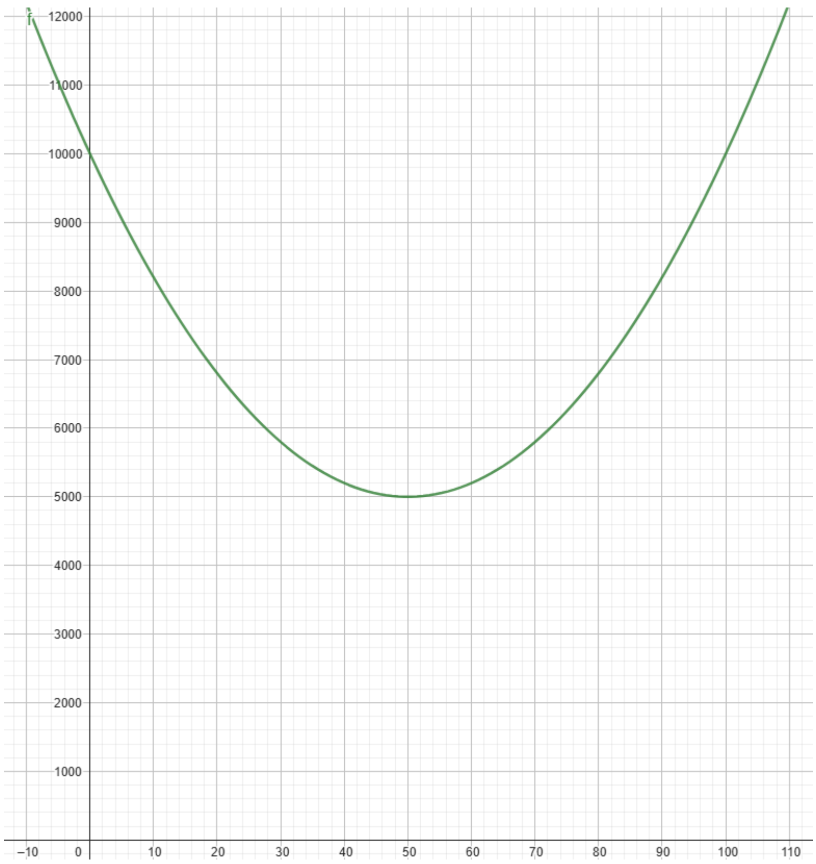
$\mathbf{S = 2x^2 - 200x + 10000}$

$p = x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{200}{4} = 50$ → x = **50**

A zatem skoro z = 100 – x, to z = **50**

Wykres funkcji

$\mathbf{S(x) = 2x^2 - 200x + 10000}$



Zad. 2 3.98 - „Zbiór zadań do liceów i techników” M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Liczbę 30 przedstaw w postaci różnicy takich dwóch liczb, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.

Poszukiwane liczby: x, z. Suma ich kwadratów: S.

$30 = x - z \quad \rightarrow \quad \mathbf{z = x - 30}$

$S = x^2 + z^2$

$S = x^2 + (x - 30)^2$

$S = x^2 + x^2 - 60x + 900$

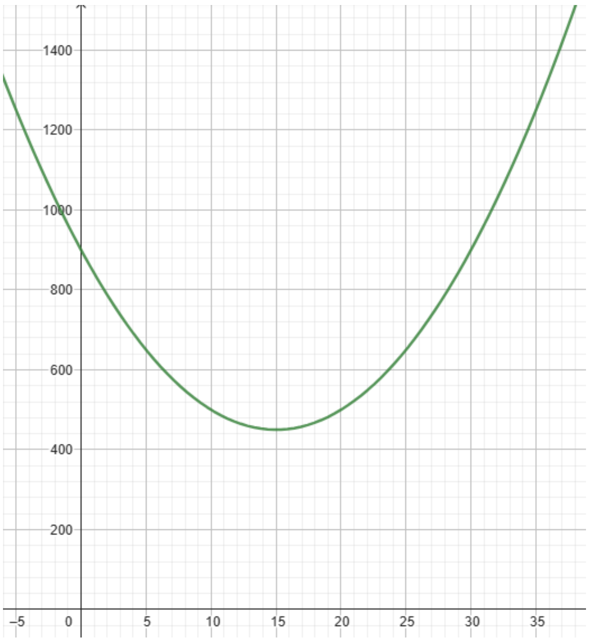
$\mathbf{S = 2x^2 - 60x + 900}$

$p = x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{60}{4} = 15$

$x = 15$ oraz $z = 15$

Wykres funkcji

$\mathbf{S = 2x^2 - 60x + 900}$



Zad. 3 3.99 - Zbiór zadań do liceów i techników M. Kurczab, E. Kurczab, E Świda

Liczbę 18 przedstaw w postaci sumy dwóch takich składników, aby suma ich sześcianów była najmniejsza.

Poszukiwane liczby: x, z. Suma ich sześcianów: f(x).

$18 = x + z \quad \rightarrow \quad z = 18 - x$

$$f(x) = x^3 + z^3$$

$$f(x) = x^3 + (18 - x)^3 \qquad \rightarrow \qquad f(x) = x^3 + (18 - x)(18 - x)^2$$

$$f(x) = x^3 + (18 - x)(324 - 36x + x^2)$$

$$f(x) = x^3 + 5832 - 648x + 18x^2 - 324x + 36x^2 - x^3$$

Szukamy minimum takiej funkcji: $\mathbf{f(x) = 54x^2 - 972x + 5832}$

Wykresem tej funkcji jest parabola, której wierzchołek określa punkt, w którym wartość tej funkcji jest najmniejsza.

$p = x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{972}{108} = 9 \quad \rightarrow \quad x = \mathbf{9} \quad$ oraz $\quad z = 18 - x = \mathbf{9}$

Wykres funkcji

$\mathbf{f(x) = 54x^2 - 972x + 5832}$